OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje IV

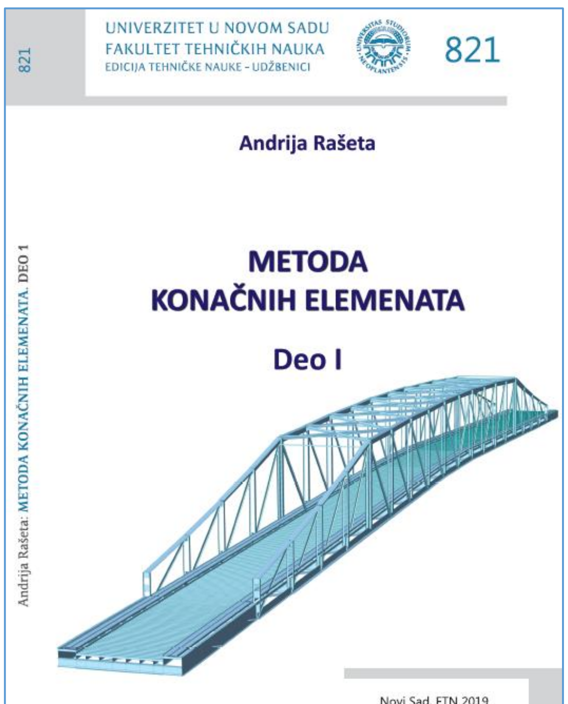
Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka
Departman za građevinarstvo i geodeziju
Katedra za konstrukcije
Prof. dr Andrija Rašeta
Kabinet LG209
email: araseta@uns.ac.rs i araseta@gmail.com

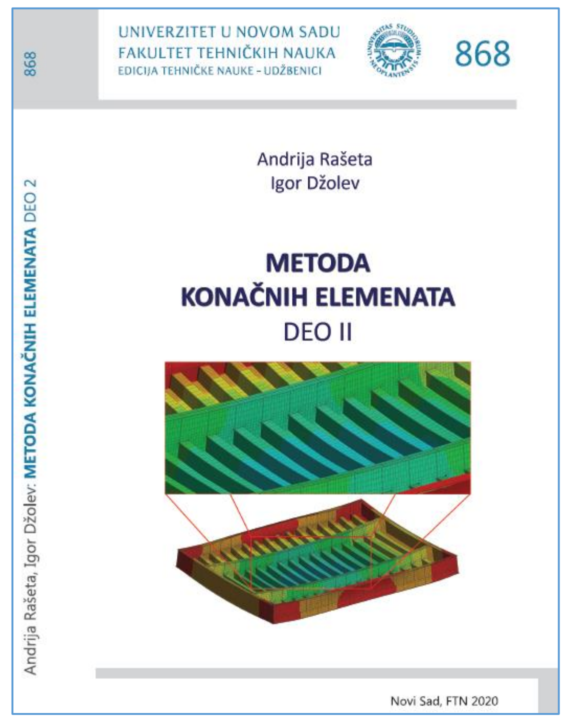
OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje IV

Ravansko stanje napona. Ravansko stanje deformacije
Prirodne koordinate i interpolacione funkcije za 2D KE
Trougaoni (LST) KE. Pravougaoni *Serendipiti* KE
Izoparametarski četvorougaoni KE sa 4 do 9 čvorova
Izoparametarski trougaoni KE sa 3 do 6 čvorova
Numerička integracija
Linearna statička analiza

Literatura

- **Metoda konačnih elemenata, deo I**, A. Rašeta, FTN Novi Sad, 2019.
- **Metoda konačnih elemenata, deo II**, A. Rašeta, I. Džolev, FTN Novi Sad, 2020.





Prirodne koordinate i interpolacione funkcije

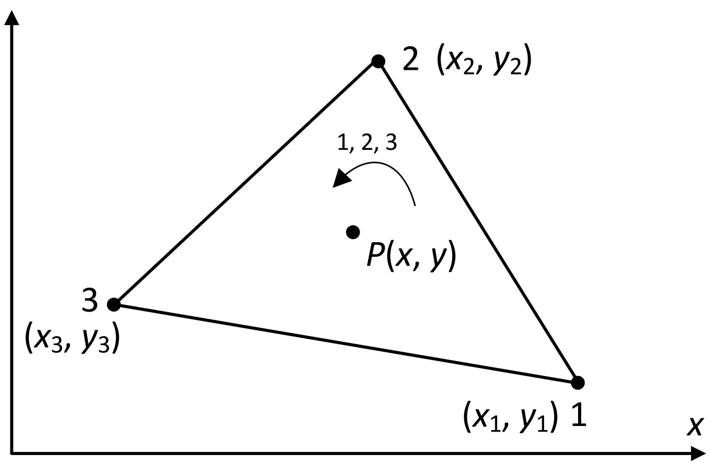
- Interpolacione funkcije zavise od koordinata tačaka u globalnom ili lokalnom (vezanom za KE) Dekartovom koordinatnom sistemu, a vrednosti koordinata zavise od veličine KE
- Pogodno je da se uvede sistem koordinata čije se vrednosti menjaju u unapred utvrđenim granicama (između 0 i 1 ili – 1 i 1) koje ne zavise od veličine KE. Ovakav sistem koordinata naziva se **prirodne koordinate (lokalne bezdimenzionalne koordinate)**
- U sistemu prirodnih koordinata položaj proizvoljne tačke u polju KE definiše se preko koordinata čvorova KE
- Prednost prirodnih u odnosu na Dekartove koordinate je jednostavnija integracija, a imaju i važnu ulogu u definisanju široko primenjivanih izoparametarskih KE

Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- **KE u obliku trougla** sa čvorovima u temenima obeleženim brojevima koji rastu suprotno od smera obrtanja kazaljke na časovniku
- Koordinate proizvoljne tačke *P*(x,*y*) se prikazuju pomoću koordinata temena trougla

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$



- Prirodna površinska ili trougaona koordinata L_i odnosi se na i-ti čvor u kome ima vrednost 1, a u ostalim čvorovima ima vrednost 0, odnosno linearno se menja od vrednosti 1 u čvoru *i* do vrednosti 0 na stranici trougla između preostala dva čvora

Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- Prirodne koordinate nisu međusobno nezavisne, tj. od tri prirodne koordinate dve su međusobno nezavisne, tj. važi sledeće relacija

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

- Matrični oblik prethodna tri izraza glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

  - gde su

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\begin{matrix} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, & a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, & a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_1 = y_2 - y_3, & b_2 = y_3 - y_1, & b_3 = y_1 - y_2 \\ c_1 = x_3 - x_2, & c_2 = x_1 - x_3, & c_3 = x_2 - x_1 \end{matrix}$$

A – površina trougla

Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- **Prirodne površinske ili trougaone koordinate** mogu da se prikažu u obliku

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y), \qquad i = 1,2,3$$

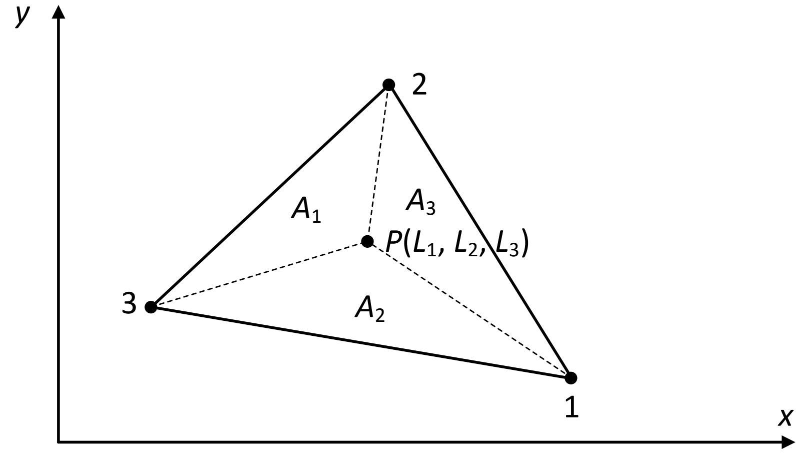
$$\begin{array}{lll} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, & a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, & a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_1 = y_2 - y_3, & b_2 = y_3 - y_1, & b_3 = y_1 - y_2 \\ c_1 = x_3 - x_2, & c_2 = x_1 - x_3, & c_3 = x_2 - x_1 \end{array}$$

Fizičko značenje prirodnih koordinata
Izraz u zagradi uz koeficijent 1/2 za i = 1 predstavlja površinu trougla definisanog koordinatama čvorova 2(x_2, y_2), 3(x_3, y_3) i tačke P(x, y) pa se na osnovu toga zaključuje da površinska koordinata L_1 predstavlja odnos površine trougla P, 2, 3 (označena sa A_1) naspram čvora 1 i površine A celog trougla

$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

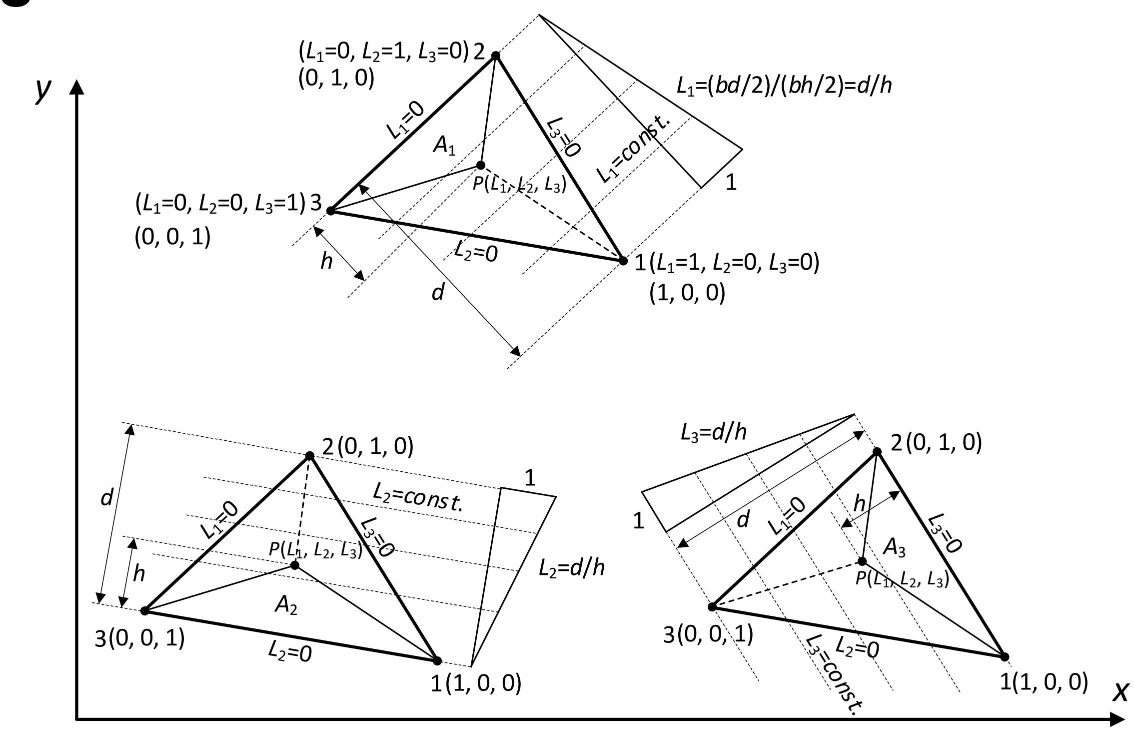
$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$



Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- **S obzirom na osobine prirodnih koordinata (linearno se menjaju od vrednosti 1 u čvoru na koji se odnose do vrednosti 0 na strani naspram čvora na koji se odnose) zaključuje se da predstavljaju linearne interpolacione funkcije trougaonog KE sa čvorovima u temenima**

$$N_1 = L_1$$
$$N_2 = L_2$$
$$N_3 = L_3$$



Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- Ako je f funkcija od $L_1(x,y)$, $L_2(x,y)$ i $L_3(x,y)$ operacija parcijalnog diferenciranja po koordinatama x i y obavlja se na sledeći način

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial L_i}\frac{\partial L_i}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial L_i}\frac{\partial L_i}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial x}&=\frac{y_2-y_3}{2A}, & \frac{\partial L_1}{\partial y}&=\frac{x_3-x_2}{2A}\\ \frac{\partial L_2}{\partial x}&=\frac{y_3-y_1}{2A}, & \frac{\partial L_2}{\partial y}&=\frac{x_1-x_3}{2A}\\ \frac{\partial L_3}{\partial x}&=\frac{y_1-y_2}{2A}, & \frac{\partial L_3}{\partial y}&=\frac{x_2-x_1}{2A}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial x}=\frac{b_i}{2A} \qquad \frac{\partial L_i}{\partial y}=\frac{c_i}{2A} \qquad i=1,2,3$$

- Integracija po površini KE, kada se pod integralom javljaju prirodne koordinate, obavlja se pomoću izraza

$$\int_A L_1^i(x,y)L_2^j(x,y)L_3^k(x,y)dA=\frac{i!\,j!\,k!}{(i+j+k+2)!}2A$$

  - gde su i, j i k celobrojni eksponenti

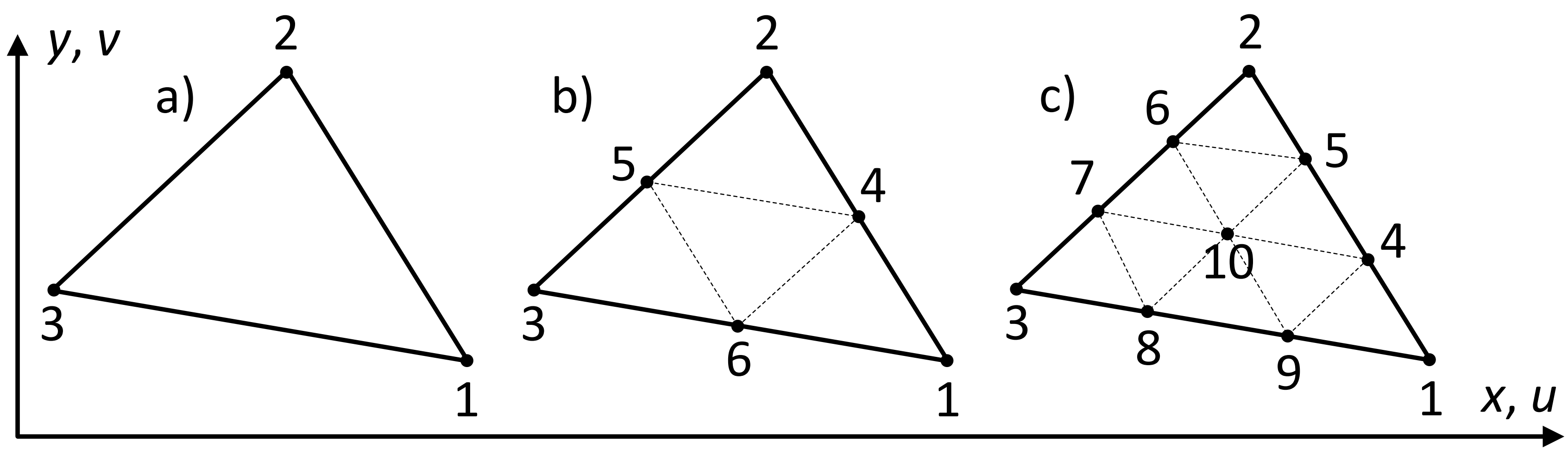
Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- **Lokacija čvorova**

***Linearni* element** (linearna interpolacija ili linearna interpolaciona funkcija)

***Kvadratni* (*paraboličan*) element** (kvadratna interpolacija ili kvadratna interpolaciona funkcija)

***Kubni* element** (kubna interpolacija ili kubna interpolaciona funkcija)

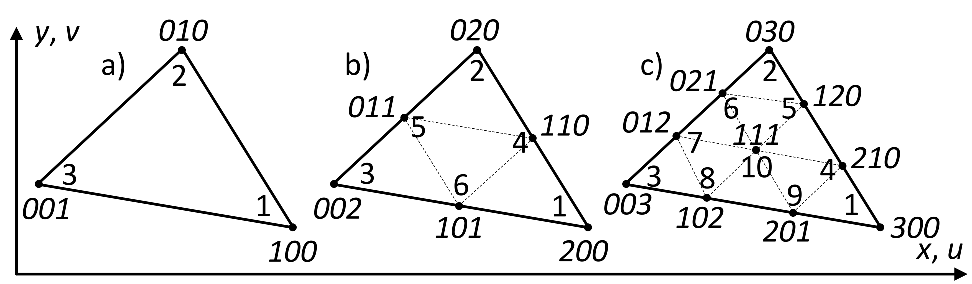


Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- **IF mogu da se odrede pomoću površinskih koordinata primenom formule**

$$N_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3) = N_\alpha(L_1) N_\beta(L_2) N_\gamma(L_3) \qquad N_\alpha(L_1) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\alpha} \left(\dfrac{nL_1 - i + 1}{i} \right) & \text{za } \alpha \geq 1 \\ 1 & \text{za } \alpha = 0 \end{cases}$$

  - pri čemu je *n* stepen polinoma
  - Analogni izrazi važe za $N_\beta(L_2)$ i $N_\gamma(L_3)$
  - Postupak obeležavanja čvorova
    - Čvorovima KE pridružuju se tri broja, a svaki broj se odnosi na jednu od stranica trougla za koju je trougaona koordinata jednaka nuli pri čemu se vrednost broja povećava sa udaljavanjem od te stranice. Vrednost broja raste od nule do maksimalne vrednosti u temenu nasuprot te stranice
    - Zbir brojeva u čvoru KE jednak je stepenu interpolacionog polinoma
    - Prvi broj je jednak 0 u čvorovima koji leže na stranici gde je $L_1 = 0$ i raste do maksimalne vrednosti u temenu trougla koji leži nasuprot te stranice
    - Drugi broj je jednak 0 u čvorovima koji leže na stranici gde je $L_2 = 0$ i raste do maksimalne vrednosti u temenu trougla koji leži nasuprot te stranice
    - Treći broj je jednak 0 u čvorovima koji leže na stranici gde je $L_3 = 0$ i raste do maksimalne vrednosti u temenu trougla koji leži nasuprot te stranice



Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

$$N_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3) = N_\alpha(L_1) N_\beta(L_2) N_\gamma(L_3)$$

$$N_\alpha(L_1) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\alpha} \left(\dfrac{nL_1 - i + 1}{i} \right) & \text{za } \alpha \geq 1 \\ 1 & \text{za } \alpha = 0 \end{cases}$$

- **Linearne IF**
  - čvor *100* $N_1 = L_1$

$$N_\alpha(L_1) = N_{\alpha=1}(L_1) = \left(\frac{1 \cdot L_1 - 1 + 1}{1} \right)$$

$$N_\beta(L_2) = N_{\beta=0}(L_2) = 1$$

$$N_\gamma(L_3) = N_{\gamma=0}(L_3) = 1$$

  - čvor *010* $N_2 = L_2$

$$N_\alpha = N_{\alpha=0} = 1$$

$$N_\beta = N_{\beta=1} = \left(\frac{1 \cdot L_2 - 1 + 1}{1} \right)$$

$$N_\gamma = N_{\gamma=0} = 1$$

  - čvor *001* $N_3 = L_3$

$$N_\alpha = N_{\alpha=0} = 1$$

$$N_\beta = N_{\beta=0} = 1$$

$$N_\gamma = N_{\gamma=1} = \left(\frac{1 \cdot L_3 - 1 + 1}{1} \right)$$

Kvadratne IF

čvor *200*

$$N_\alpha(L_1) = N_{\alpha=2}(L_1) = \left(\frac{2 \cdot L_1 - 1 + 1}{1} \right) \left(\frac{2 \cdot L_1 - 2 + 1}{2} \right)$$

$$N_\beta(L_2) = N_{\beta=0}(L_2) = 1$$

$$N_\gamma(L_3) = N_{\gamma=0}(L_3) = 1$$

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$$

čvor *110*

$$N_\alpha(L_1) = N_{\alpha=1}(L_1) = \left(\frac{2 \cdot L_1 - 1 + 1}{1} \right)$$

$$N_\beta(L_2) = N_{\beta=1}(L_2) = \left(\frac{2 \cdot L_2 - 1 + 1}{1} \right)$$

$$N_\gamma(L_3) = N_{\gamma=0}(L_3) = 1$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

Ostale IF određuju se analogno

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1) \qquad N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

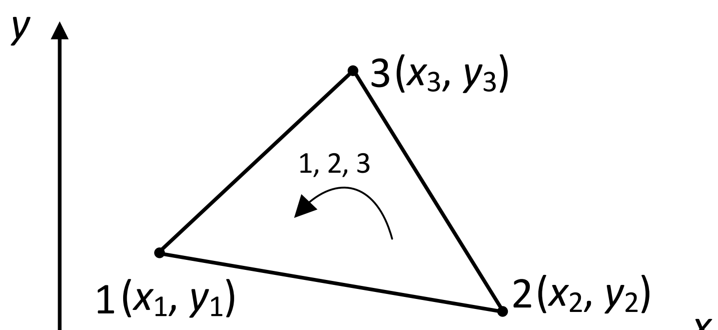
$$N_5 = 4L_2L_3 \qquad N_6 = 4L_1L_3$$

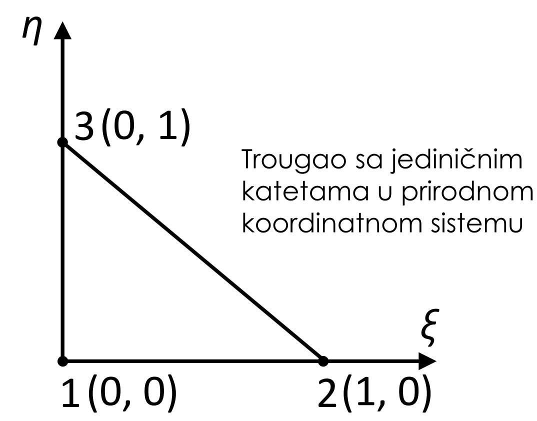
Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- Pored prethodno opisanih prirodnih površinskih koordinata može da se koristi **sistem prirodnih koordinata *ξ* i *η***
  - Preslikavanje proizvoljnog trougla (linearne IF) iz Dekartovog koordinatnog sistema u trougao sa jediničnim katetama u prirodnom koordinatnom sistemu obavlja se na sledeći način

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta$$





Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- Ako je f funkcija od x i y koje su u funkciji od ξ i η, tj. $f = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ operacija parcijalnog diferenciranja obavlja se na sledeći način

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

  - gde je $\mathbf{J}$ Jakobijeva (Jacobi) matrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$$

- Sada sledi

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & -(y_1 - y_3) \\ -(x_2 - x_3) & x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

  - gde je determinanta Jakobijeve matrice

$$\det\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = 2A = a_1 + a_2 + a_3$$

Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Trougaoni KE

- Veza između elementarnih površina u Dekartovom i prirodnom koordinatnom sistemu glasi (pravilo smene promenljivih u višestrukom integralu)

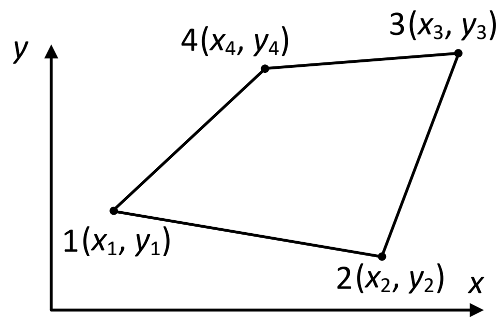
$$dxdy = \det\mathbf{J}d\xi d\eta$$

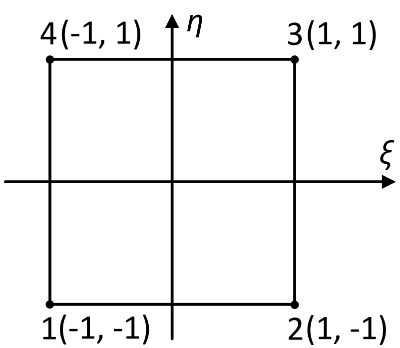
- Za **KE u obliku trougla sa jediničnim katetama površinske koordinate** glase

$$L_1 = 1 - \xi - \eta \qquad L_2 = \xi \qquad L_3 = \eta$$

Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Četvorougaoni KE

- **Linearne IF**
  - Koristi se sistem prirodnih koordinata ξ i η čije vrednosti se kreću od – 1 do 1. Na ovaj način četvorougaoni KE iz Dekartovih koordinata x i y preslikava se na kvadratni element jediničnih polustrana u prirodnom koordinatnom sistemu $\xi\eta$





  - Dekartove koordinate x i y proizvoljne tačke u polju KE mogu da se prikažu kao linearna kombinacija koordinata čvorova x_1, y_1, …, x_4 i y_4

$$x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 + L_4x_4 = \sum_{i=1}^{4} L_i x_i$$

$$y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 + L_4y_4 = \sum_{i=1}^{4} L_i y_i$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 & L_4 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 & L_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Četvorougaoni KE

- **Linearne IF**
  - Za određivanje funkcija L_i koristi se veza između globalnih Dekartovih i prirodnih (lokalnih bezdimenzionalnih) koordinata

$$x = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \qquad y = \alpha_5 + \alpha_6\xi + \alpha_7\eta + \alpha_8\xi\eta$$

  - Za koordinatu x sledi

$$x = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \qquad \mathbf{A} = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \qquad \boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4\}$$

  - Za temena četvorougla važi

$$x = x_i \quad \xi = \xi_i \quad \eta = \eta_i \qquad i = 1,2,3,4$$

  - Koristeći prethodne izraze može da se napiše za svaki čvor KE

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{X} \qquad x = \mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}$$

$$\mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Četvorougaoni KE

- **Linearne IF**
  - Koristeći

$$\mathbf{A} = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \qquad \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}$$

  - određuju se funkcije L_i

$$L_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad L_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$L_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad L_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

  - odnosno

$$N_i = L_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \qquad i = 1,2,3,4$$

$$x = \sum_{i=1}^{4} L_i x_i = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} L_i y_i = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i$$

Prirodne koordinate i interpolacione funkcije. 2D KE. Četvorougaoni KE

- **Linearne IF**
  - Jakobijeva matrica

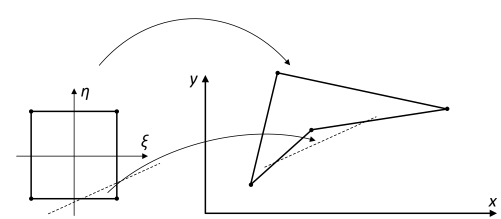
$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial L_i}{\partial\xi}x_i & \sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial L_i}{\partial\xi}y_i\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial L_i}{\partial\eta}x_i & \sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial L_i}{\partial\eta}y_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\left[\begin{array}{c:c} x_1(-1+\eta)+x_2(1-\eta)+x_3(1+\eta)+x_4(-1-\eta) & y_1(-1+\eta)+y_2(1-\eta)+y_3(1+\eta)+y_4(-1-\eta)\\ \hdashline x_1(-1+\xi)+x_2(-1-\xi)+x_3(1+\xi)+x_4(1-\xi) & y_1(-1+\xi)+y_2(-1-\xi)+y_3(1+\xi)+y_4(1-\xi)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1+\eta & 1-\eta & 1+\eta & -1-\eta\\ -1+\xi & -1-\xi & 1+\xi & 1-\xi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{Bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial\xi}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial\eta}\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{J}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{J}}\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial L_i}{\partial\eta}y_i & -\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial L_i}{\partial\xi}y_i\\ -\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial L_i}{\partial\eta}x_i & \sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial L_i}{\partial\xi}x_i\end{bmatrix}=\frac{1}{\det\mathbf{J}}\begin{bmatrix}J_{22} & -J_{12}\\ -J_{21} & J_{11}\end{bmatrix}$$

$$\det\mathbf{J}=J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}\qquad dxdy=\det\mathbf{J}\,d\xi d\eta$$

Komentar:
Kod jako izobličenog (distorziranog) proizvoljnog osnovnog četvorougaonog KE, što se dešava u slučaju kada je jedan od unutrašnjih uglova veći od 180°, jednoznačnost preslikavanja je narušena pa se ovo ne sme dopustiti

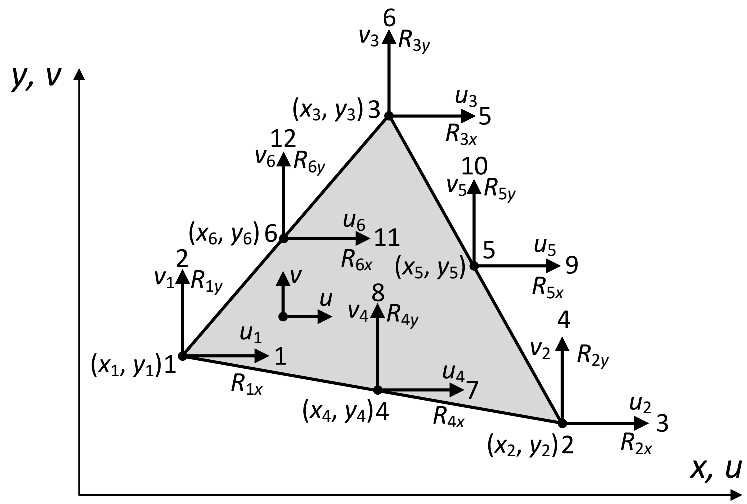


2D KE. Trougaoni KE. Kvadratna interpolacija. LST KE

- Analizira se trougaoni KE pravolinijskih stranica, proizvoljno orijentisan, sa čvorovima u temenima i sredinama strana

$$\mathbf{d}^T = \{\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3 \quad \mathbf{d}_4 \quad \mathbf{d}_5 \quad \mathbf{d}_6\}$$

$$\mathbf{d}_i^T = \{u_i \quad v_i\}, \qquad i = 1,2,3,\ldots,6$$



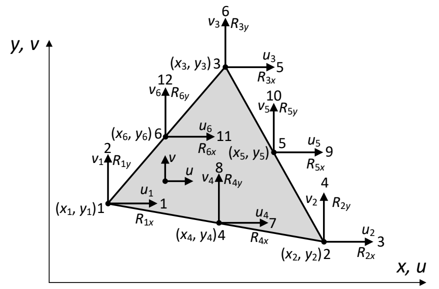
- **Primeniće se direktan postupak za određivanje IF analogno kao i kod CST elementa**

- Raspodela pomeranja u polju KE definisana je potpunim polinomom drugog stepena

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$

$$v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} x^2 + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} y^2$$

2D KE. Trougaoni KE. Kvadratna interpolacija. LST KE



- Prethodne jednačine u matričnom obliku glase

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$$

  - gde je $\mathbf{A}$ matrica polinoma i $\boldsymbol{\alpha}$ je vektor koeficijenata

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12}\}$$

- Za čvorove KE sledi

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 \\ v_i &= \alpha_7 + \alpha_8 x_i + \alpha_9 y_i + \alpha_{10} x_i^2 + \alpha_{11} x_i y_i + \alpha_{12} y_i^2 \end{aligned}\right\} \qquad i = 1,2,3,\ldots,6$$

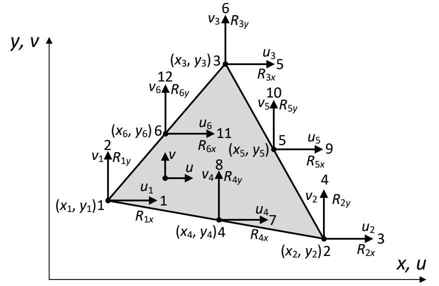
  - gde su x_i i y_i koordinate *i*-tog čvora, pri čemu za čvorove 4, 5 i 6 važi (pravolinijske stranice KE)

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_4 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_5 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \qquad y_5 = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

$$x_6 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \qquad y_6 = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

2D KE. Trougaoni KE. Kvadratna interpolacija. LST KE



- Vektor pomeranja čvorova KE glasi

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}$$

- Matrica IF glasi

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{4A^2}\Big[\big(2xy_2 - 2xy_3 - x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_2y + x_2y_1 + x_2y_3 + 2x_3y - x_3y_1 - x_3y_2\big)\cdot \cdot\big(xy_2 - xy_3 - x_2y + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2\big)\Big]$$

$$N_4 = \frac{1}{A^2}\Big[\big(-xy_1 + xy_3 + x_1y - x_1y_3 - x_3y + x_3y_1\big)\cdot \cdot\big(xy_2 - xy_3 - x_2y + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2\big)\Big]$$

$$N_2 = \frac{1}{4A^2}\Big[\big(-2xy_1 + 2xy_3 + 2x_1y - x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 - x_2y_3 - 2x_3y + x_3y_1 + x_3y_2\big)\cdot \cdot\big(-xy_1 + xy_3 + x_1y - x_1y_3 - x_3y + x_3y_1\big)\Big]$$

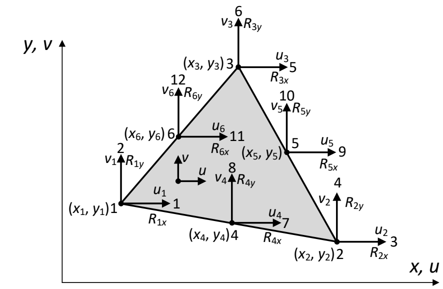
$$N_5 = \frac{1}{A^2}\Big[-\big(-xy_1 + xy_2 + x_1y - x_1y_2 - x_2y + x_2y_1\big)\cdot \cdot\big(-xy_1 + xy_3 + x_1y - x_1y_3 - x_3y + x_3y_1\big)\Big]$$

$$N_3 = \frac{1}{4A^2}\Big[\big(-2xy_1 + 2xy_2 + 2x_1y - x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_2y + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2\big)\cdot \cdot\big(-xy_1 + xy_2 + x_1y - x_1y_2 - x_2y + x_2y_1\big)\Big]$$

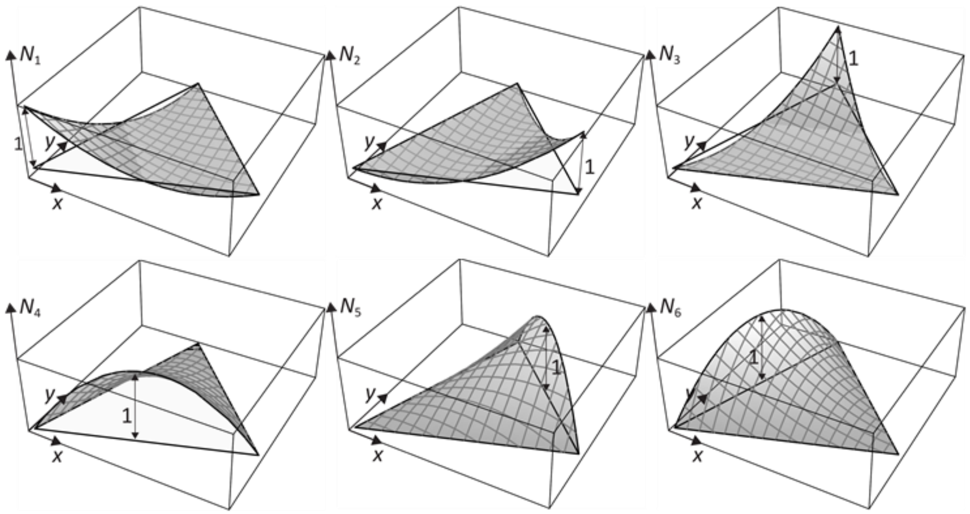
$$N_6 = \frac{1}{A^2}\Big[-\big(-xy_1 + xy_2 + x_1y - x_1y_2 - x_2y + x_2y_1\big)\cdot \cdot\big(xy_2 - xy_3 - x_2y + x_2y_3 + x_3y - x_3y_2\big)\Big]$$

matrice $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}^{-1}$ nisu prikazane zbog opsežnosti

2D KE. Trougaoni KE. Kvadratna interpolacija. LST KE



- **IF**



- **IF se znatno jednostavnije određuju primenom prirodnih površinskih koordinata**

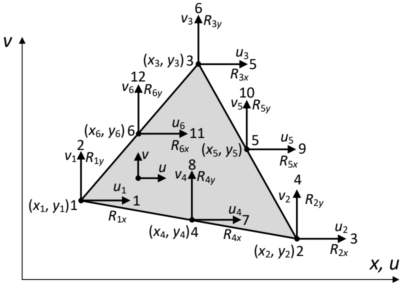
$$L_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right), \qquad i = 1,2,3 \qquad A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2 + a_3\right)$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, & a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, & a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_1 = y_2 - y_3, & b_2 = y_3 - y_1, & b_3 = y_1 - y_2 \\ c_1 = x_3 - x_2, & c_2 = x_1 - x_3, & c_3 = x_2 - x_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} N_1 = L_1\left(2L_1 - 1\right), & N_2 = L_2\left(2L_2 - 1\right), & N_3 = L_3\left(2L_3 - 1\right) \\ N_4 = 4L_1 L_2, & N_5 = 4L_2 L_3, & N_6 = 4L_1 L_3 \end{array}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} L_1\left(2L_1 - 1\right) & 0 & L_2\left(2L_2 - 1\right) & 0 & L_3\left(2L_3 - 1\right) & 0 & 4L_1L_2 & 0 & 4L_2L_3 & 0 & 4L_1L_3 & 0 \\ 0 & L_1\left(2L_1 - 1\right) & 0 & L_2\left(2L_2 - 1\right) & 0 & L_3\left(2L_3 - 1\right) & 0 & 4L_1L_2 & 0 & 4L_2L_3 & 0 & 4L_1L_3 \end{bmatrix}$$

2D KE. Trougaoni KE. Kvadratna interpolacija. LST KE



- Matrica B

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial L_i}\frac{\partial L_i}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial L_i}\frac{\partial L_i}{\partial y}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_1(-1+4L_1) & 0 & b_2(-1+4L_2) & 0 & b_3(-1+4L_3) & 0 & 4(b_2L_1+b_1L_2) & 0 & 4(b_3L_2+b_2L_3) & 0 & 4(b_3L_1+b_1L_3) & 0\\ 0 & c_1(-1+4L_1) & 0 & c_2(-1+4L_2) & 0 & c_3(-1+4L_3) & 0 & 4(c_2L_1+c_1L_2) & 0 & 4(c_3L_2+c_2L_3) & 0 & 4(c_3L_1+c_1L_3)\\ c_1(-1+4L_1) & b_1(-1+4L_1) & c_2(-1+4L_2) & b_2(-1+4L_2) & c_3(-1+4L_3) & b_3(-1+4L_3) & 4(c_2L_1+c_1L_2) & 4(b_2L_1+b_1L_2) & 4(c_3L_2+c_2L_3) & 4(b_3L_2+b_2L_3) & 4(c_3L_1+c_1L_3) & 4(b_3L_1+b_1L_3)\end{bmatrix}$$

- Matrica krutosti

$$\mathbf{k}=\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV=h\int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dA\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & 0\\ D_{21} & D_{22} & 0\\ 0 & 0 & D_{33}\end{bmatrix}$$

$$\int_A L_1^i(x,y)L_2^j(x,y)L_3^k(x,y)dA=\frac{i!\,j!\,k!}{(i+j+k+2)!}2A$$

$$k_{1-1}=\frac{h}{4A}(b_1^2D_{11}+c_1^2D_{33})$$

$$k_{1-2}=k_{2-1}=\frac{h}{4A}b_1c_1(D_{12}+D_{33})$$

$$k_{1-3}=k_{3-1}=\frac{h}{12A}(-b_1b_2D_{11}-c_1c_2D_{33})$$

itd. (videti Metod konačnih elemenata, deo II)

Komentari:

- Vektor ekvivalentnog opterećenja, raspodela pomeranja, deformacije i napona u polju KE određuju se analognim postupkom kao i kod CST elementa
- Prikazani element sa kvadratnom interpolacijom spada u **konformne konačne elemente** (ispunjena kompatibilnost pomeranja)
- Raspodela deformacije i napona u polju KE je linearna funkcija koordinata tačaka pa se ovaj element naziva **trougaoni element sa linearnim deformacijama ili LST element** (**L**inear **S**train **T**riangle element)

Serendipiti konačni elementi

- Da bi se prevazišao problem povećanja broja stepeni slobode numeričkog modela usled pojave čvorova po površini Lagranžovih KE razvijeni su KE kod kojih se uvode **čvorovi samo po ivicama**
- **IF izvode se iz uslova da su im vrednosti u čvoru na koji se odnose 1, a u preostalim čvorovima 0**
- Takođe, potrebno je da se obezbedi raspodela pomeranja duž ivica KE koja se jednoznačno definiše pomoću stepeni slobode u čvorovima koji pripadaju tim ivicama, odnosno na taj način obezbeđuje se ispunjenje uslova kompatibilnosti pomeranja duž granica između KE
- Ovakvi elementi nazivaju se još i *Serendipiti* KE

2D KE. Pravougaoni KE. *Serendipiti* konačni elementi

- U *Serendipiti* familiju spada i **pravougaoni KE koji ima čvorove samo u temenima** za koga su IF u Dekartovom koordinatnom sistemu i u prirodnom koordinatnom sistemu date izrazima

$$N_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \qquad N_2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

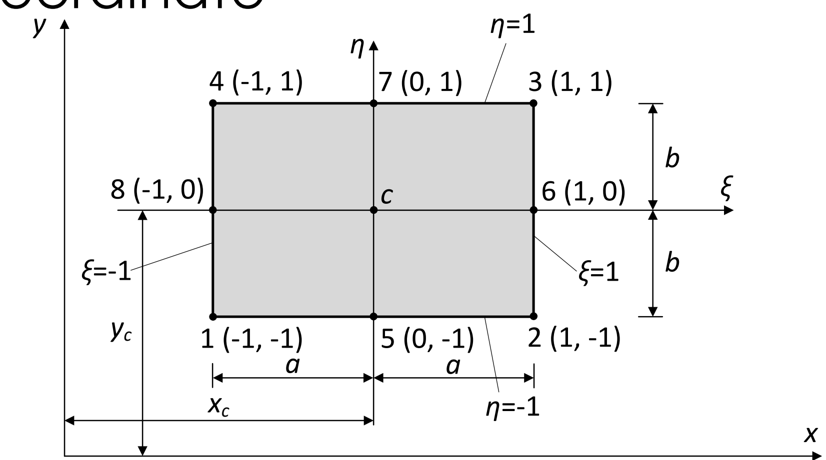
$$N_3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \qquad N_4 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \qquad i = 1,2,3,4$$

- **Serendipiti konačni element drugog reda.** Pri izvođenju IF pogodno je koristiti prirodne koordinate

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \qquad d\xi = \frac{dx}{a}$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b} \qquad d\eta = \frac{dy}{b}$$



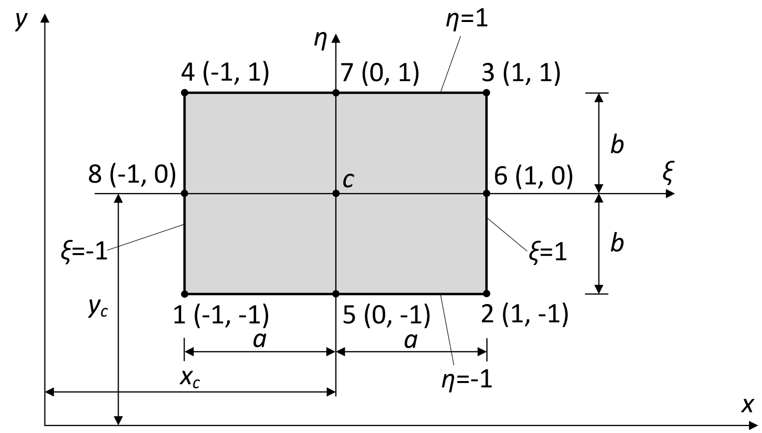
2D KE. Pravougaoni KE. *Serendipiti* konačni elementi

- **Serendipiti KE drugog reda**
  - Serendipiti KE višeg reda mogu da se izvedu primenom Lagranžovih polinoma i drugih poznatih interpolacionih funkcija
  - **IF za čvorove koji se nalaze duž ivice KE (ne u temenima)** određuju se množenjem Lagranžovih polinoma drugog stepena u pravcu ivice kojoj pripada posmatrani čvor i Lagranžovih polinoma prvog stepena upravno na posmatranu ivicu
  - Za čvor 5 ($\xi = 0$, $\eta = -1$), Lagranžov polinom drugog stepena koji se određuje koristeći proceduru za određivanje opisanu za pravougaoni KE sa bikvadratnom interpolacijom glasi

$$L_{5,\text{u pravcu ivice}} = 1 - \xi^2$$

  - Lagranžov polinom prvog stepena upravno na posmatranu ivicu glasi

$$L_{5,\text{upravno na ivicu}} = \frac{1-\eta}{2}$$



2D KE. Pravougaoni KE. *Serendipiti* konačni elementi

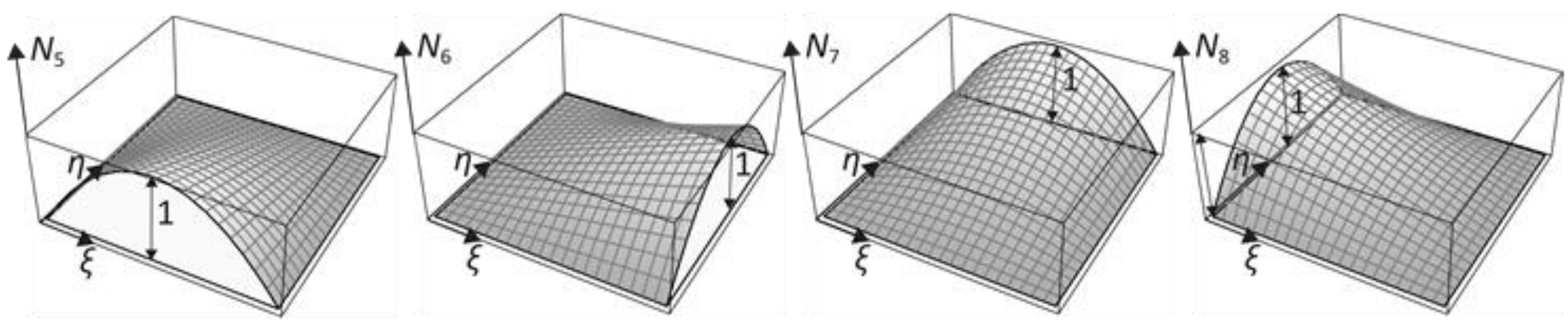
- **Serendipiti KE drugog reda**
  - Množenjem prethodna dva izraza određuje se IF za čvor 5

$$N_5 = (1 - \xi^2)\left(\frac{1-\eta}{2}\right)$$

  - Analognim postupkom određuju se IF za ostale čvorove u sredinama strana KE

$$N_6 = (1 - \eta^2)\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \qquad N_7 = (1 - \xi^2)\left(\frac{1+\eta}{2}\right) \qquad N_8 = (1 - \eta^2)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)$$

  - IF za čvorove u sredinama strana Serendipiti KE



2D KE. Pravougaoni KE. *Serendipiti* konačni elementi

- **Serendipiti KE drugog reda**
  - IF za čvor 1 (teme pravougaonika sa koordinatama $\xi = -1, \eta = -1$) određuje se oduzimanjem IF srednjih čvorova pomnoženih koeficijentom 1/2 od funkcije $N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$

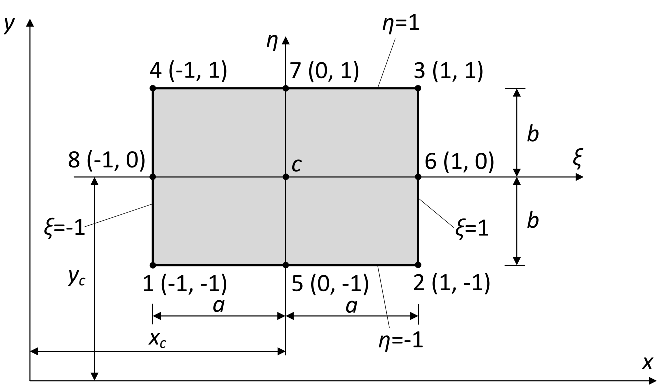
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8 \qquad N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

  - Analognim postupkom mogu da se odrede IF i za ostale čvorove u temenima pravougaonog KE

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

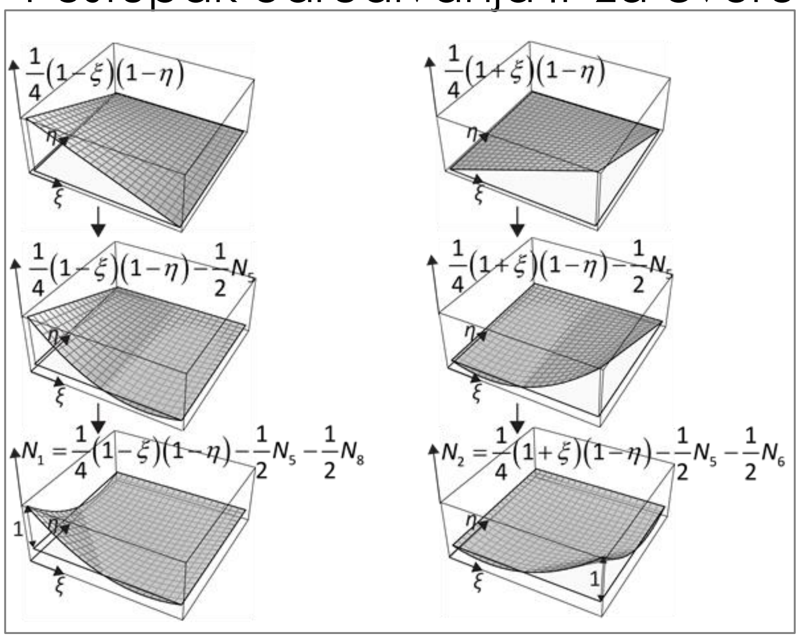
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$

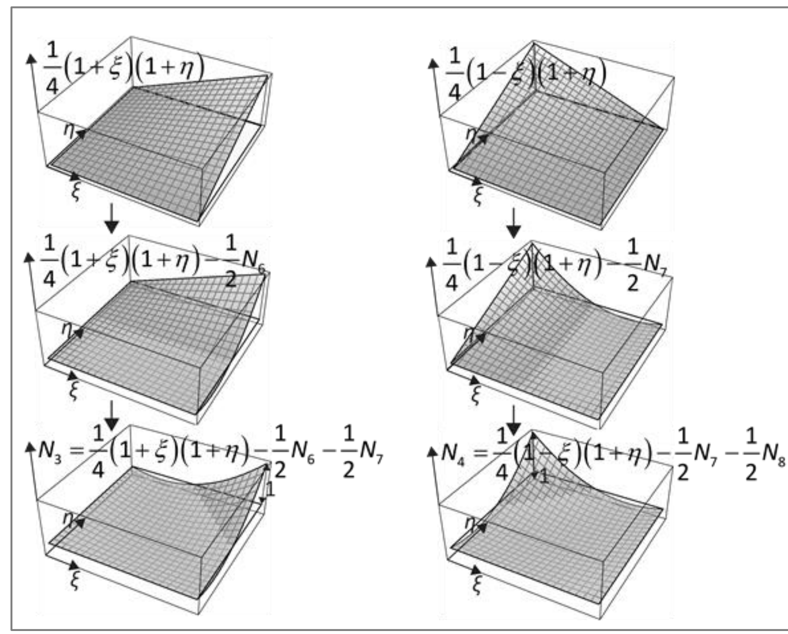
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$



2D KE. Pravougaoni KE. *Serendipiti* konačni elementi

- **Serendipiti KE drugog reda**
  - Postupak određivanja IF za čvorove u temenima KE





  - IF Serendipiti KE drugog reda mogu da se prikažu izrazima za

Čvorovi u temenima

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1)$$

$$i = 1,2,3,4$$

Čvorove 5 i 7 u sredinama strana (η_i = ±1)

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)$$

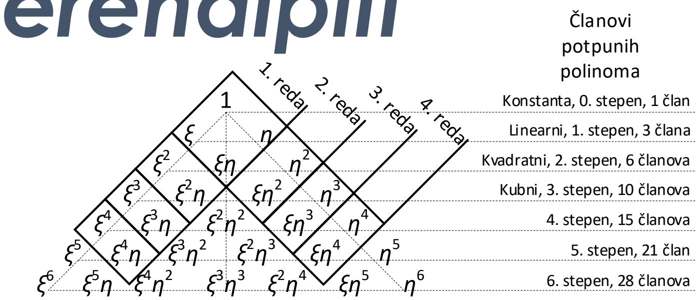
$$i = 5,7$$

Čvorovi 6 i 8 u sredinama strana (ξ_i = ±1)

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_i\xi)$$

$$i = 6,8$$

2D KE. Pravougaoni KE. *Serendipiti* konačni elementi



- **Komentari**
  - Članovi polinoma za aproksimaciju raspodele pomeranja kod Serendipiti KE dati su na slici gore
  - Kod Serendipiti KE drugog reda sadržani su svi članovi polinoma drugog stepena i dva člana polinoma trećeg stepena
  - Kod Lagranžovog KE sa bikvadratnom interpolacijom raspodela pomeranja sadrži članove potpunog polinoma drugog reda, dva člana polinoma trećeg reda i jedan član polinoma četvrtog reda
  - Nepotpunost polinoma kod Lagranžovog KE sa bikvadratnom interpolacijom je veća nego kod Serendipiti KE drugog reda, odnosno ovo je prednost Serendipiti KE
  - Nedostatak Serendipiti KE u odnosu na Lagranžove KE je u složenijoj proceduri izvođenja IF
  - Pored KE sa jednakim brojem čvorova duž ivica mogu da se izvedu i Serendipiti KE sa različitim brojem čvorova koji mogu da se primene pri formiranju delova mreže KE na prelasku sa jednog na drugi tip KE

Izoparametarski konačni elementi

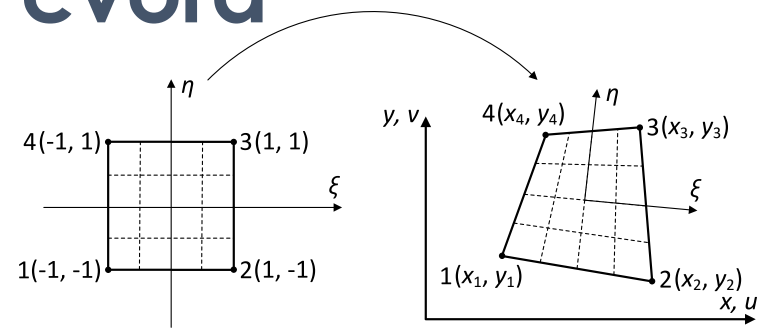
- KE osnovnih geometrijskih oblika mogu da se preslikaju (engl. mapping) iz lokalnog prirodnog (bezdimenzionalnog) koordinatnog sistema u različite geometrijske oblike sa pravolinijskim i krivolinijskim konturama u globalnom Dekartovom koordinatnom sistemu, pri čemu je geometrija elementa u globalnom Dekartovom koordinatnom sistemu definisana IF u prirodnim koordinatama koje su jednake funkcijama preslikavanja
- **Ako se geometrija KE i polje pomeranja aproksimiraju istim IF onda se ovakvi elementi nazivaju izoparametarski KE**
- Ako su IF kojima se aproksimira geometrija elementa višeg reda od onih kojima se aproksimira polje pomeranja radi se o **superparametarskim KE**, a u suprotnom, radi se o **subparametarskim KE**

Izoparametarski konačni elementi. Četvorougaoni KE sa 4 čvora

- IF u prirodnim koordinatama

$$N_i = L_i$$

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \quad i = 1,2,3,4$$



Referentni (preslikani) element **Realni ili fizički element**

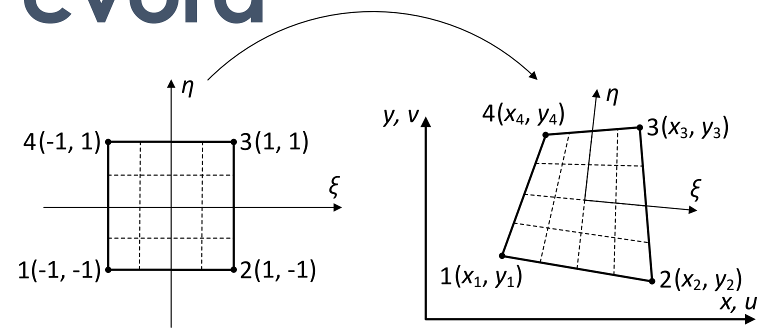
- S obzirom na to da se radi o izoparametarskom KE, geometrija i raspodela pomeranja opisuju se istim IF

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)y_i$$

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)u_i \qquad v = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)v_i$$

  - gde su x_i i y_i Dekartove koordinate i -tog čvora realnog elementa, a u_i i v_i komponente pomeranja i -tog čvora realnog elementa u pravcu Dekartovih osa

Izoparametarski konačni elementi. Četvorougaoni KE sa 4 čvora



- Matrica krutosti

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,dV = \int_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,h\,dA$$

$$dxdy = \det\mathbf{J}\,d\xi d\eta \qquad \mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,h\det\mathbf{J}\,d\xi d\eta$$

- Matrica **B**

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & \dfrac{\partial N_4}{\partial y} & \dfrac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

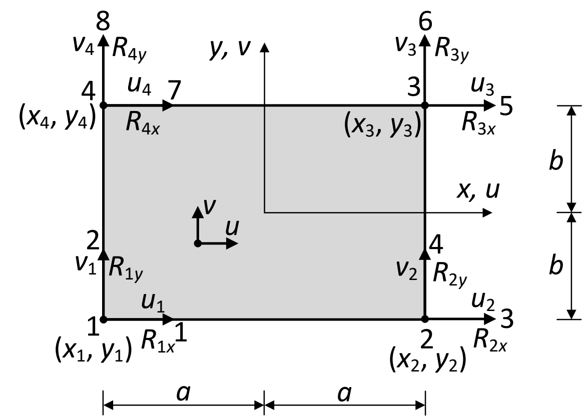
- Jakobijeva matrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial L_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial L_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial L_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial L_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\left[\begin{array}{c:c} x_1(-1+\eta)+x_2(1-\eta)+x_3(1+\eta)+x_4(-1-\eta) & y_1(-1+\eta)+y_2(1-\eta)+y_3(1+\eta)+y_4(-1-\eta) \\ \hdashline x_1(-1+\xi)+x_2(-1-\xi)+x_3(1+\xi)+x_4(1-\xi) & y_1(-1+\xi)+y_2(-1-\xi)+y_3(1+\xi)+y_4(1-\xi) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

Izoparametarski konačni elementi. Četvorougaoni KE sa 4 čvora

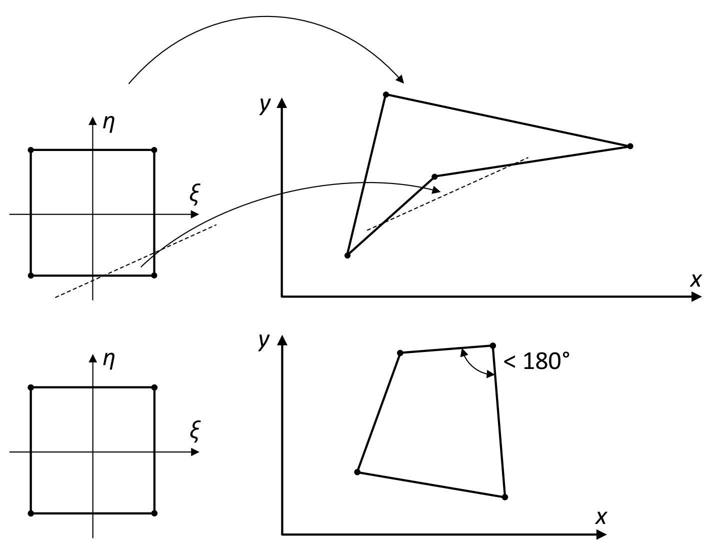
- Inverzna Jakobijeva matrica $$\mathbf{J}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{J}}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial L_i}{\partial\eta}y_i & -\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial L_i}{\partial\xi}y_i\\ -\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial L_i}{\partial\eta}x_i & \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial L_i}{\partial\xi}x_i\end{bmatrix}=\frac{1}{\det\mathbf{J}}\begin{bmatrix}J_{22} & -J_{12}\\ -J_{21} & J_{11}\end{bmatrix}$$
- Determinanta Jakobijeve matrice $\det\mathbf{J}=J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}$
- Integracija pri određivanju matrice krutosti u lokalnim prirodnim koordinatama je u granicama od – 1 do 1, a to znatno pojednostavljuje proceduru. Međutim, zbog složenosti podintegralnih funkcija uobičajeno je da se umesto analitičkog rešenja pri određivanju elemenata matrice krutosti koristi **numerička integracija**
- Ako je proizvoljni četvorougaoni KE u obliku pravougaonika sledi

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}\qquad \det\mathbf{J}=ab$$



Izoparametarski konačni elementi. Četvorougaoni KE sa 4 čvora

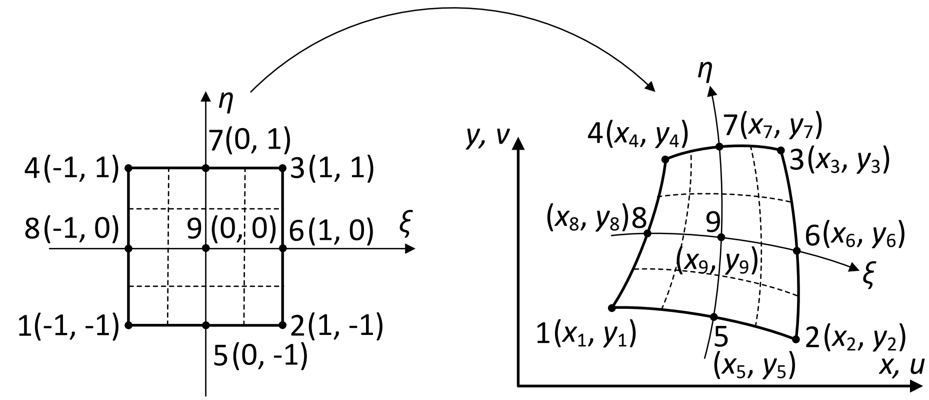
- **Jakobijeva matrica ne sme biti singularna, tj. njena determinanta mora biti različita od nule, odnosno mora biti obezbeđena jednoznačnost preslikavanja**
  - Jednoj tački referentnog elementa mora da odgovara samo jedna tačka fizičkog elementa. Jednoznačnost preslikavanja je narušena kod četvorougaonih elemenata sa čvorovima u temenima (bilinearna interpolacija) ako je jedan od uglova u temenima veći od 180°



Komentar
Generalno, kontrola geometrije izoparametarskih elemenata može da se obavi preko izračunavanja determinante Jakobijeve matrice, tj. ako je determinanta jednaka ili manja od nule element je jako distorziran pa je potrebno promeniti (korigovati) geometriju KE

Izoparametarski konačni elementi. Četvorougaoni KE. Lagranžov KE sa 9 čvorova

- IF glase



$$L_1(\xi)=\frac{1}{2}(\xi^2-\xi),\quad L_2(\xi)=1-\xi^2,\quad L_3(\xi)=\frac{1}{2}(\xi^2+\xi)$$

$$L_1(\eta)=\frac{1}{2}(\eta^2-\eta),\quad L_2(\eta)=1-\eta^2,\quad L_3(\eta)=\frac{1}{2}(\eta^2+\eta)$$

$$N_1=L_1(\xi)L_1(\eta),\quad N_2=L_3(\xi)L_1(\eta),\quad N_3=L_3(\xi)L_3(\eta),\quad N_4=L_1(\xi)L_3(\eta)$$

$$N_5=L_2(\xi)L_1(\eta),\quad N_6=L_3(\xi)L_2(\eta),\quad N_7=L_2(\xi)L_3(\eta),\quad N_8=L_1(\xi)L_2(\eta)$$

$$N_9=L_2(\xi)L_2(\eta)$$

- Geometrija KE i raspodela pomeranja definisani su na sledeći način

$$x=\sum_{i=1}^{9}N_i(\xi,\eta)x_i,\quad y=\sum_{i=1}^{9}N_i(\xi,\eta)y_i$$

$$u=\sum_{i=1}^{9}N_i(\xi,\eta)u_i,\quad v=\sum_{i=1}^{9}N_i(\xi,\eta)v_i$$

Izoparametarski konačni elementi. Četvorougaoni KE koji ima 4 do 9 čvorova

- S obzirom na to da izoparametarski KE mogu imati proizvoljan broj čvorova, IF mogu da se predstave na sledeći način

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8 - \frac{1}{4}N_9$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{4}N_9$$

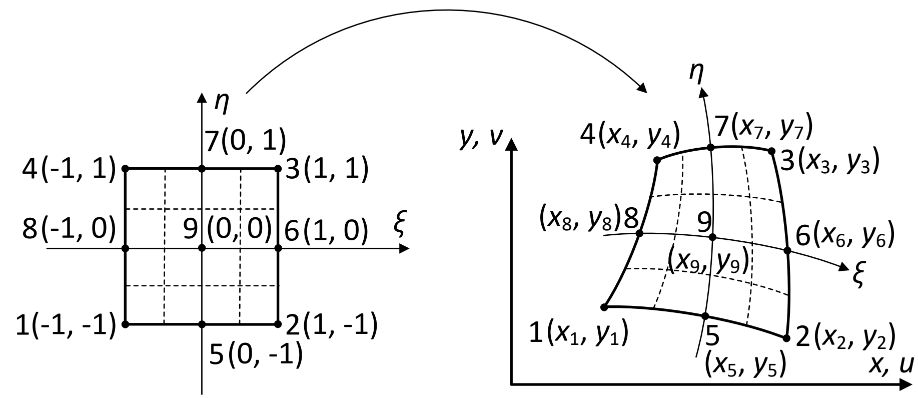
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{4}N_9$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8 - \frac{1}{4}N_9$$

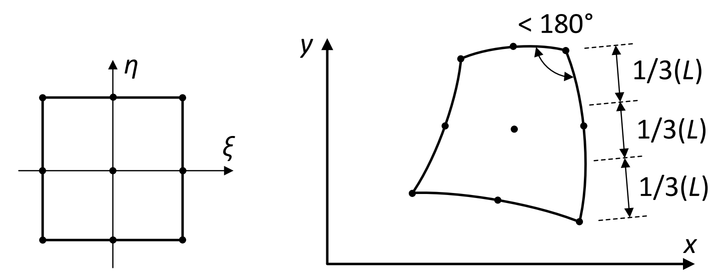
$$N_5 = \left(1-\xi^2\right)\left(\frac{1-\eta}{2}\right) - \frac{1}{2}N_9, \quad N_6 = \left(1-\eta^2\right)\left(\frac{1+\xi}{2}\right) - \frac{1}{2}N_9$$

$$N_7 = \left(1-\xi^2\right)\left(\frac{1+\eta}{2}\right) - \frac{1}{2}N_9, \quad N_8 = \left(1-\eta^2\right)\left(\frac{1-\xi}{2}\right) - \frac{1}{2}N_9$$

$$N_9 = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)$$



Ako neki od čvorova 5 do 9 ne postoji odgovarajuću interpolacionu funkciju treba izjednačiti sa nulom



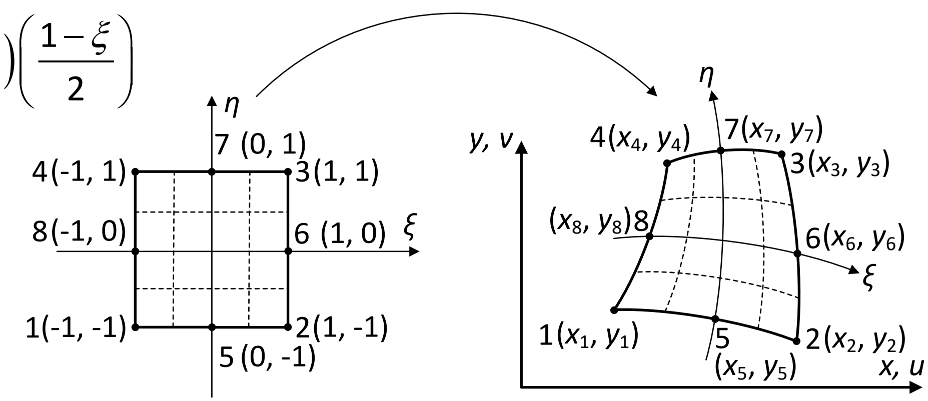
Izoparametarski konačni elementi. Serendipiti KE sa 8 čvorova

- IF $N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$, $N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$

$$N_5 = (1-\xi^2)\left(\frac{1-\eta}{2}\right), \quad N_6 = (1-\eta^2)\left(\frac{1+\xi}{2}\right)$$

$$N_7 = (1-\xi^2)\left(\frac{1+\eta}{2}\right), \quad N_8 = (1-\eta^2)\left(\frac{1-\xi}{2}\right)$$

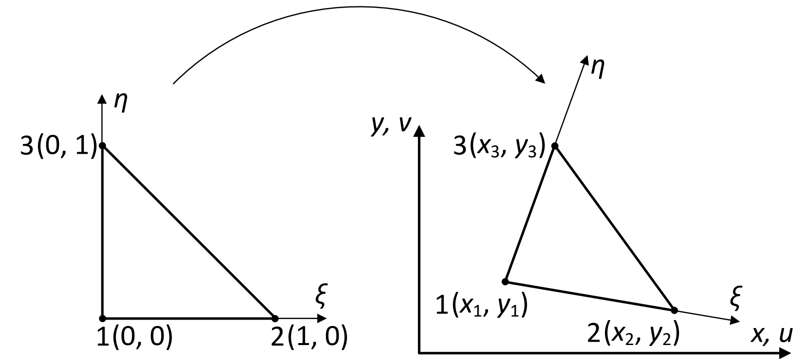


- Geometrija KE i raspodela pomeranja definisani su na sledeći način

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)x_i \quad y = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)y_i \quad u = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)u_i \quad v = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta)v_i$$

Izoparametarski konačni elementi. Trougaoni KE

- **KE sa 3 čvora**
  - IF



$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \qquad N_2 = \xi, \qquad N_3 = \eta$$

  - Geometrija KE i raspodela pomeranja opisuju se na sledeći način

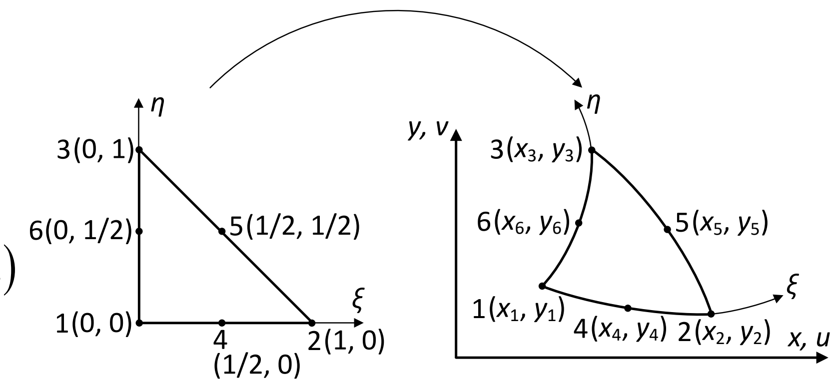
$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta) x_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta) y_i \qquad u = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta) u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta) v_i$$

- **KE sa 6 čvorova**
  - IF

$$L_1 = 1 - \xi - \eta, \qquad L_2 = \xi, \qquad L_3 = \eta$$

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1), \qquad N_2 = L_2(2L_2 - 1), \qquad N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_2, \qquad N_5 = 4L_2L_3, \qquad N_6 = 4L_1L_3$$



  - Geometrija KE i raspodela pomeranja opisuju se na sledeći način

$$x = \sum_{i=1}^{6} N_i(\xi,\eta) x_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{6} N_i(\xi,\eta) y_i \qquad u = \sum_{i=1}^{6} N_i(\xi,\eta) u_i, \qquad v = \sum_{i=1}^{6} N_i(\xi,\eta) v_i$$

Izoparametarski konačni elementi. Trougaoni KE

- Određivanje parcijalnih izvoda IF po prirodnim koordinatama obavlja se na sledeći način

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}=\frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \eta}+\frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \eta}+\frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \eta}$$

$$L_1=1-\xi-\eta,\quad L_2=\xi,\quad L_3=\eta$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=-\frac{\partial N_i}{\partial L_1}+\frac{\partial N_i}{\partial L_2},\quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta}=-\frac{\partial N_i}{\partial L_1}+\frac{\partial N_i}{\partial L_3}$$

- **Trougaoni KE koji imaju 3 do 6 čvorova**

$$N_1=1-\xi-\eta-\frac{1}{2}N_4-\frac{1}{2}N_6,\quad N_2=\xi-\frac{1}{2}N_4-\frac{1}{2}N_5$$

$$N_3=\eta-\frac{1}{2}N_5-\frac{1}{2}N_6,\quad N_4=4\xi\left(1-\xi-\eta\right)$$

$$N_5=4\xi\eta,\quad N_6=4\eta\left(1-\xi-\eta\right)$$

Ako neki od čvorova 4 do 6 ne postoji odgovarajuću interpolacionu funkciju treba izjednačiti sa nulom

- **Matrica krutosti**

$$\mathbf{k}=\int_{\xi=0}^{1}\int_{\eta=0}^{1-\xi}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}h\det\mathbf{J}\,d\eta\, d\xi$$

Jakobijeva matrica **J**, inverzna matrica $\mathbf{J}^{-1}$, determinanta Jakobijeve matrice det**J** i matrica **B** određuju se analognim postupcima kao i kod četvorougaonog KE

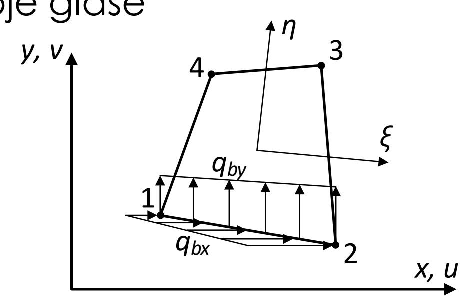
Zbog složenosti podintegralne funkcije uobičajeno je da se umesto analitičkog rešavanja integrala, pri određivanju elemenata matrice krutosti koristi **numerička integracija**

Izoparametarski konačni elementi. Vektor ekvivalentnog opterećenja

- **Izoparametarski četvorougaoni KE**
  - Konstantno zapreminsko opterećenje $\mathbf{q} = \{q_{x0}, q_{y0}\}^T$ ($h = const.$)

$$\mathbf{Q}_{8x1} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{q} dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^T_{8x2}\mathbf{q}_{2x1} h \det \mathbf{J} d\xi d\eta = h\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^T \det \mathbf{J} d\xi d\eta\right)\begin{Bmatrix} q_{x0} \\ q_{y0} \end{Bmatrix}$$

  - Raspodeljeno opterećenje po ivici
    - Analizira se izoparametarski četvorougaoni KE koji je opterećen linearno promenljivim opterećnjem po ivici 1-2 za koju je lokalna prirodna koordinata η konstantna i ima vrednost –1. S obzirom da se opterećenje menja linearno za vektor $\mathbf{q}_b$ treba koristiti linearne IF za opterećenu ivicu koje glase

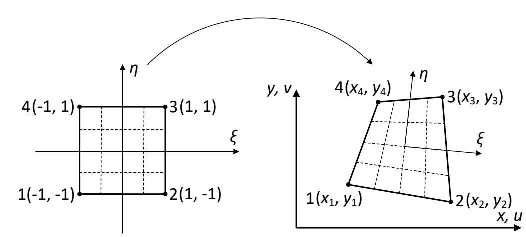


$$\mathbf{Q} = \int_{Sq} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b dS = \int_{-1}^{1} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b h \det \mathbf{J}_S d\xi$$

$$N_{S,1} = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad N_{S,2} = \frac{1}{2}(1+\xi), \quad N_{S,3} = N_{S,4} = 0$$

Matrica $\mathbf{N}_S$ se određuje uvrštavanjem prirodne koordinate opterećene ivice u matricu interpolacionih funkcija za KE

$$\mathbf{q}_b = \begin{Bmatrix} q_{bx}(\xi) \\ q_{by}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{S,1} q_{bx,1} + N_{S,2} q_{bx,2} \\ N_{S,1} q_{by,1} + N_{S,2} q_{by,2} \end{Bmatrix}$$



Izoparametarski konačni elementi. Vektor ekvivalentnog opterećenja

- **Izoparametarski četvorougaoni KE**
  - Raspodeljeno opterećenje po ivici
    - S obzirom na to da se integracija obavlja u lokalnom prirodnom koordinatnom sistemu diferencijalnu površinu dS neophodno je izraziti u funkciji lokalnih prirodnih koordinata ξ i η. Diferencijalna površina ivice koja je izložena opterećenju može da se izrazi na sledeći način

$$dS = h\,ds \qquad ds = \det\mathbf{J}_S\, d\xi, \qquad \det\mathbf{J}_S = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} & x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)y_i \\ & N_{s,1} = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad N_{s,2} = \frac{1}{2}(1+\xi), \quad N_{s,3} = N_{s,4} = 0 \end{aligned}\right\} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_2 - x_1}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

    - U slučaju jednako raspodeljenog opterećenja $\mathbf{q}_b = \{q_{bx0}, q_{by0}\}^T$ po ivici 1-2 u pravcu osa x i y sledi

$$\mathbf{Q}^T = \frac{hL_{1-2}}{2}\{q_{bx0} \quad q_{by0} \quad q_{bx0} \quad q_{by0} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

Numerička integracija. Gaus-Ležandrov postupak

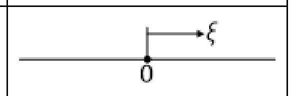
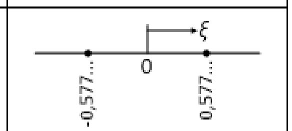
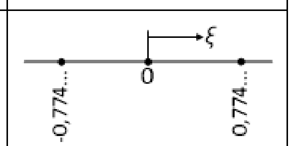
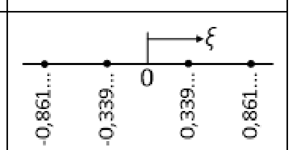
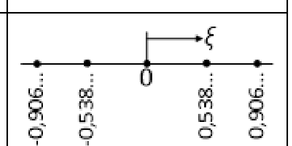
- **Jednodimenzionalni, četvorougaoni i heksaedarski izoparametarski KE**

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\,d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i F(\xi_i)$$

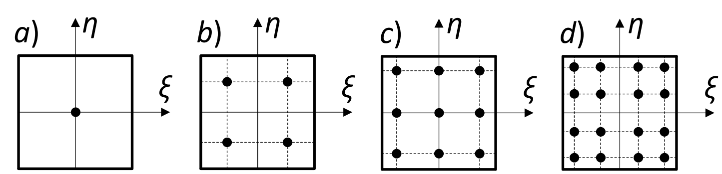
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \sum_{j=1}^{nj} w_j \left(\sum_{i=1}^{ni} w_i F(\xi_i,\eta_j) \right) = \sum_{i=1}^{ni}\sum_{j=1}^{nj} w_{ij} F(\xi_i,\eta_j), \qquad w_{ij} = w_i w_j$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta = \sum_{k=1}^{nk} w_k \left[\sum_{j=1}^{nj} w_j \left(\sum_{i=1}^{ni} w_i F(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \right) \right] = \sum_{i=1}^{ni}\sum_{j=1}^{nj}\sum_{k=1}^{nk} w_{ijk} F(\xi_i,\eta_j,\zeta_k), \qquad w_{ijk} = w_i w_j w_k$$

Tačke integracije i težinski koeficijenti

n	Stepen polinoma	i	ξ_i	w_i	
1	1	1	0,0	2,0	
2	3	1 2	−0,5773502692 0,5773502692	1,0 1,0	
3	5	1 2 3	−0,7745966692 0 0,7745966692	5/9 8/9 5/9	
4	7	1 2 3 4	−0,8611363116 −0,3399810436 0,3399810436 0,8611363116	0,3478548451 0,6521451549 0,6521451549 0,3478548451	
5	9	1 2 3 4 5	−0,9061798459 −0,5384693101 0 0,5384693101 0,9061798459	0,2369268851 0,4786286705 0,5688888889 0,4786286705 0,2369268851	

Raspored tačaka integracije za četvorougaoni referentni element (red integracije: a) 1x1, b) 2x2, c) 3x3 i d) 4x4)



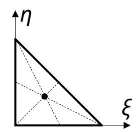
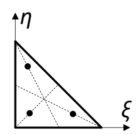
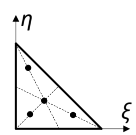
Numerička integracija. Gaus-Ležandrov postupak

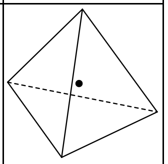
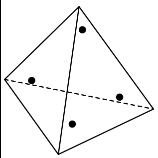
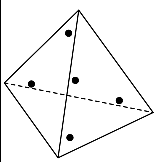
- **Trougaoni i tetraedarski izoparametarski KE**

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \sum_{i,j}^{n} wF(\xi_i,\eta_j)$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} F(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \sum_{i,j,k}^{n} wF(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)$$

Tačke integracije i težinski koeficijenti

n	Stepen polinoma	ξ_i, η_i	*w*	
1	1	1/3, 1/3	1/2	
3	2	1/6, 1/6 2/3, 1/6 1/6, 2/3	1/6 1/6 1/6	
4	3	1/3, 1/3 1/5, 1/5 3/5, 1/5 1/5, 3/5	– 27/96 25/96 25/96 25/96	

n	Stepen polinoma	ξ_i, η_i, ζ_i	*w*	
1	1	1/4, 1/4, 1/4	1/6	
4	2	$\beta, \beta, \beta;\ \ \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta;\ \ \beta, \beta, \alpha$ α = 0,58541020 β = 0,13819660	1/24 1/24	
5	3	1/4, 1/4, 1/4 $\beta, \beta, \beta;\ \ \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta;\ \ \beta, \beta, \alpha$ α = 1/2; β = 1/6	– 2/15 3/40 3/40	

Numerička integracija. Napomene

- **Ukupan broj tačaka integracije** kod trodimenzionalnih KE iznosi $n_i x n_j x n_k$, kod dvodimenzionalnih KE iznosi $n_i x n_j$ i kod jednodimenzionalnih KE iznosi n_i i **naziva se red integracije**
- Kod dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih problema nije neophodno koristiti isti postupak numeričke integracije za svaku od osa
- Broj integracionih tačaka ne mora biti isti za svaku od osa
- **Pri numeričkoj integraciji ključno je koji se postupak koristi i koji se red integracije primenjuje (minimalan i optimalan)**
- **Kod Gausovog postupka, sa n tačaka integracije, dobija se tačno rešenje za polinom $2n - 1$ stepena**

Numerička integracija. Napomene

- ***Pravilo tačne zapremine***
  - Jedan od uslova za konvergenciju rešenja (videti predavanje 05.) je da KE može da opiše stanje konstantne deformacije, odnosno kada veličina konačnog elementa teži nuli, integrand $\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{DB}$ u izrazu za matricu krutosti treba da teži konstanti, tj. sledi

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{DB} dV = \mathbf{B}^T \mathbf{DB} \int_V dV$$

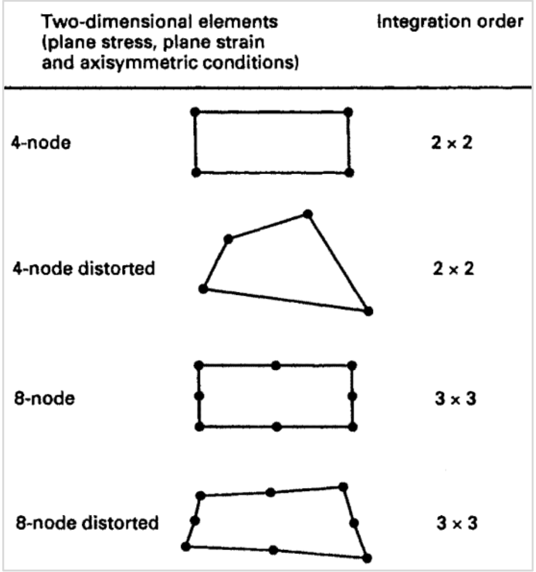
  - S obzirom na prethodno, potrebno je da se numeričkom integracijom odredi tačno rešenje za zapreminu KE. Analogno važi i za dvodimenzionalne i jednodimenzionalne konačne elemente, tj. numeričkom integracijom potrebno je da se odredi tačno rešenje za površinu i dužinu elementa, respektivno

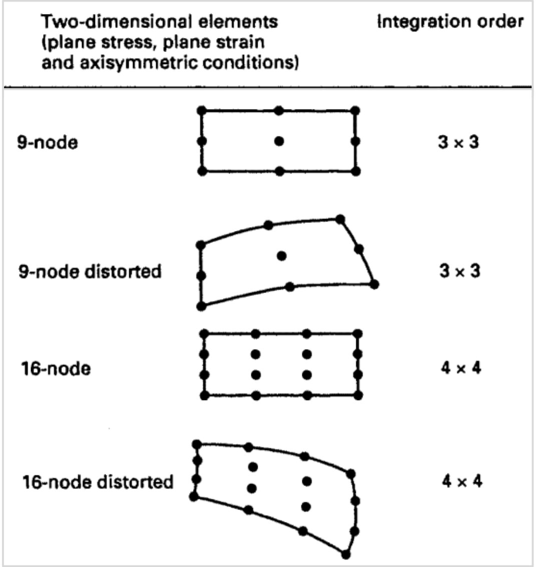
Numerička integracija. Napomene

- **Nizak red numeričke integracije**
  - Red numeričke integracije bitno utiče na vreme proračuna pa se u praksi teži tome da se smanji red numeričke integracije
    - Ovo skraćuje vreme proračuna
    - Ali može da prouzrokuje da matrica krutosti KE ima veći broj nultih svojstvenih vrednosti od uje broja pomeranja kao krutog tela, a ovo ugrožava rešavanje sistema jednačina
- **Distorzija elemenata utiče na red integracije**
  - Kod KE pravilnih geometrijskih oblika za tačno određivanje matrice krutosti, potrebno je manje tačaka integracije nego kod distorziranih elemenata
  - Ako je distrozija KE u dopuštenim granicama, može da se zadrži isti red integracije kao i kod KE pravilnih oblika, a to ne utiče na brzinu konvergencije i na smanjenje tačnosti rešenja
  - Kod jako distorziranih KE potrebno je povećati red integracije

Numerička integracija. Napomene

- **Preporuke za minimalni i optimalni red numeričke integracije**
  - Geometrijski pravilni KE u slučaju linearne interpolacije (matrica **k**)
    - det**J** je nezavisna od prirodnih koordinata pa zaključujemo da podintegralna funkcija u izrazu za matricu krutosti **k** sadrži polinome drugog stepena pa je za tačnu integraciju matrice krutosti potrebno n=2 integracionih tačaka Gausove kvadrature
    - Za tačnu integraciju nepravilnih elemenata (neparalelne strane, det**J**≠const.) potrebno je n > 2
  - Analogno se dolazi do preporuke za elemente sa kvadratnom interpolacijom, kada se koristi n=3 Gausove tačke po svakoj od prirodnih koordinata za integraciju matrice **k**
  - Analogno se dolazi do preporuka za vektor **Q**



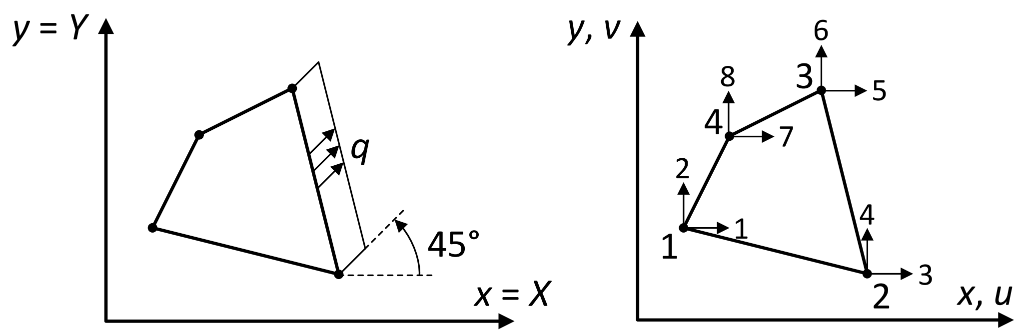


Numerička integracija. Napomene

- Pri rešavanju problema metodom pomeranja, u opštem slučaju, mreža konformnih konačnih elemenata poseduje veću krutost od krutosti realne konstrukcije koja se analizira (pomeranja su manja od realnih). Primenom numeričke integracije sa manjim brojem tačaka (tzv. **redukovana integracija**) približno se određuju matrice krutosti konačnih elemenata, a to ima za posledicu smanjenje krutosti mreže konačnih elemenata, odnosno sa istom gustinom mreže određuju se rešenja bliža tačnim. Međutim, primena redukovane integracije može da ugrozi konvergenciju rešenja. Pored redukovane integracije koristi se i tzv. **selektivna integracija (poseban vid redukovane integracije)** kod koje se različiti delovi matrice krutosti numerički integrale sa različitim redom (npr. koristi se kao jedan od načina eliminacije shear-locking-a kod analize savijanja ploča)

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- Za četvorougaoni izoparametarski konačni element koji ima 4 čvora potrebno je odrediti (ravansko stanje napona): matricu krutosti, vektor ekvivalentnog opterećenja usled q = 10 kN/m^2 i komponente napona i deformacije u tačkama integracije usled zadatih komponenata pomeranja čvorova KE
- Podaci: $E = 210 \cdot 10^6$ kPa, $\nu = 0,3$, $h = 0,005$ m, koordinate čvorova:
  $x_1 = 0,01$ m, $x_2 = 0,05$ m
  $x_3 = 0,04$ m, $x_4 = 0,02$ m
  $y_1 = 0,02$ m, $y_2 = 0,01$ m
  $y_3 = 0,05$ m i $y_4 = 0,04$ m
  komponente pomeranja čvorova:
  $u_1 = 0,00001$ m
  $v_1 = u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0,0$ m

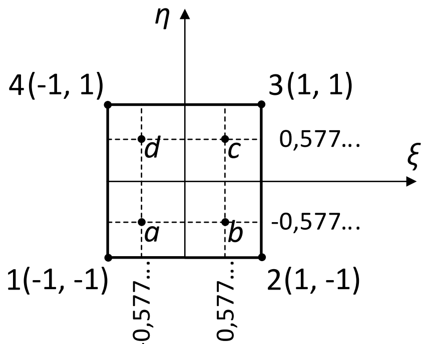


Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- **Matrica krutosti**

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{k}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}h\det\mathbf{J}\,d\xi\,d\eta \\ &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\sum_{i=1}^{ni}\sum_{j=1}^{nj}w_{ij}F(\xi_i,\eta_j),\qquad w_{ij}=w_iw_j \end{aligned}\right\}\Rightarrow\qquad F(\xi_i,\eta_j)=\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}h\det\mathbf{J}$$

- Za svaku tačku integracije sa koordinatama ξ_i i η_j potrebno je da se izračuna vrednost izraza $F(\xi_i, \eta_j)$ i pomnoži težinskim koeficijentom $w_{ij} = w_i w_j$. Sumiranjem rezultata za sve tačke integracije određuje se matrica krutosti KE
- Primenjuje se red integracije 2x2 gde su tačke integracije obeležene slovima a, b, c i d i istovremeno su jednake prirodnim koordinatama



$$\xi_a=-1/\sqrt{3},\quad \eta_a=-1/\sqrt{3},\quad \xi_b=1/\sqrt{3},\quad \eta_b=-1/\sqrt{3}$$
$$\xi_c=1/\sqrt{3},\quad \eta_c=1/\sqrt{3},\quad \xi_d=-1/\sqrt{3},\quad \eta_d=1/\sqrt{3}$$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- Ukupni težinski koeficijenti za tačke integracije iznose

$$w_a = w_b = w_c = w_d = 1{,}0 \cdot 1{,}0 = 1{,}0$$

- IF

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

- Jakobijeva matrica i njena inverzna matrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i = \frac{1}{4}\left[x_1(-1+\eta) + x_2(1-\eta) + x_3(1+\eta) + x_4(-1-\eta)\right]$$

$$J_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i = \frac{1}{4}\left[y_1(-1+\eta) + y_2(1-\eta) + y_3(1+\eta) + y_4(-1-\eta)\right]$$

$$J_{21} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i = \frac{1}{4}\left[x_1(-1+\xi) + x_2(-1-\xi) + x_3(1+\xi) + x_4(1-\xi)\right]$$

$$J_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i = \frac{1}{4}\left[y_1(-1+\xi) + y_2(-1-\xi) + y_3(1+\xi) + y_4(1-\xi)\right]$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & -\sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ -\sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{J} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21}$$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- Matrica **B**

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{1}{\det\mathbf{J}}\left(J_{22}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}-J_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y}=\frac{1}{\det\mathbf{J}}\left(-J_{21}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J_{12}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right) \end{array}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(-1+\eta) \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(1-\eta) \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(1+\eta) \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(-1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta}=\frac{1}{4}(-1+\xi), \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta}=\frac{1}{4}(-1-\xi) \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta}=\frac{1}{4}(1+\xi) \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta}=\frac{1}{4}(1-\xi)$$

- Matrica **D**

$$\mathbf{D}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3000 & 900 & 0 \\ 900 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 1050 \end{bmatrix}\cdot 10^6$$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- U svakoj tački integracije neophodno je odrediti matricu krutosti
- Tačka integracije *a*

$$J_{11,a}(\xi_a,\eta_a)=J_{11}\left(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}\right)=0{,}01789$$

$$J_{12,a}(\xi_a,\eta_a)=J_{12}\left(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}\right)=-0{,}00289$$

$$J_{21,a}(\xi_a,\eta_a)=J_{21}\left(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}\right)=0{,}00289$$

$$J_{22,a}(\xi_a,\eta_a)=J_{22}\left(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}\right)=0{,}01211$$

$$\det\mathbf{J}_a(\xi_a,\eta_a)=\det\mathbf{J}\left(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}\right)=0{,}000225$$

$$\mathbf{J}_a^{-1}(\xi_a,\eta_a)=\begin{bmatrix}53{,}83666 & 12{,}83001\\ -12{,}83001 & 79{,}49667\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_a=\mathbf{B}(\xi_a,\eta_a)=\mathbf{B}\left(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}-26{,}2892 & 0 & 19{,}8742 & 0 & 7{,}0442 & 0 & -0{,}6292 & 0\\ 0 & -26{,}2892 & 0 & -13{,}4592 & 0 & 7{,}0442 & 0 & 32{,}7042\\ -26{,}2892 & -26{,}2892 & -13{,}4592 & 19{,}8742 & 7{,}0442 & 7{,}0442 & 32{,}7042 & -0{,}6292\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_a=\mathbf{B}_a^T\mathbf{D}\mathbf{B}_a h\det\mathbf{J}_a w_a$$

$$\mathbf{k}_a=\begin{bmatrix}2{,}4222 & 1{,}1663 & -1{,}0349 & -0{,}1992 & -0{,}6490 & -0{,}3125 & -0{,}7383 & -0{,}6546\\ & 2{,}4222 & -0{,}0854 & 0{,}4438 & -0{,}3125 & -0{,}6490 & -0{,}7683 & -2{,}2171\\ & & 1{,}1900 & -0{,}4514 & 0{,}2773 & 0{,}0229 & -0{,}4324 & 0{,}5139\\ & & & 0{,}8292 & 0{,}0534 & -0{,}1189 & 0{,}5972 & -1{,}1541\\ & & & & 0{,}1739 & 0{,}0837 & 0{,}1978 & 0{,}1754\\ & \text{sim.} & & & & 0{,}1739 & 0{,}2059 & 0{,}5941\\ & & & & & & 0{,}9729 & -0{,}0347\\ & & & & & & & 2{,}7771\end{bmatrix}\cdot 10^5$$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- Analognim postupkom određuju se u <u>tačkama integracije *b*, *c* i *d*</u> matrice krutosti $\mathbf{k}_b$, $\mathbf{k}_c$ i $\mathbf{k}_d$, respektivno, nakon čega se njihovim sabiranjem određuje numeričko rešenje za matricu krutosti $\mathbf{k}_N$ KE

$$\mathbf{k}_N = \begin{bmatrix} 5{,}3052 & 1{,}8207 & -2{,}3453 & -0{,}1261 & -2{,}4833 & -1{,}9294 & -0{,}4766 & 0{,}2348 \\ & 5{,}3052 & 0{,}1623 & 1{,}4047 & -1{,}9294 & -2{,}4833 & -0{,}0537 & -4{,}2266 \\ & & 4{,}0510 & -1{,}8810 & 1{,}4047 & -0{,}1261 & -3{,}1104 & 1{,}8448 \\ & & & 4{,}0510 & 0{,}1623 & -2{,}3453 & 1{,}8448 & -3{,}1104 \\ & & & & 5{,}3052 & 1{,}8207 & -4{,}2266 & -0{,}0537 \\ & \text{sim.} & & & & 5{,}3052 & 0{,}2348 & -0{,}4766 \\ & & & & & & 7{,}8136 & -2{,}0260 \\ & & & & & & & 7{,}8136 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

- Analitičko rešenje za matricu krutosti $\mathbf{k}_A$ KE glasi

$$\mathbf{k}_A = \begin{bmatrix} 5{,}3676 & 1{,}8112 & -2{,}3661 & -0{,}1230 & -2{,}4209 & -1{,}9388 & -0{,}5806 & 0{,}2505 \\ & 5{,}3676 & 0{,}1655 & 1{,}3839 & -1{,}9388 & -2{,}4202 & -0{,}0379 & -4{,}3306 \\ & & 4{,}0579 & -1{,}8821 & 1{,}3839 & -0{,}1230 & -3{,}0757 & 1{,}8396 \\ & & & 4{,}0579 & 0{,}1655 & -2{,}3661 & 1{,}8396 & -3{,}0757 \\ & & & & 5{,}3676 & 1{,}8112 & -4{,}3306 & -0{,}0379 \\ & \text{sim.} & & & & 5{,}3676 & 0{,}2505 & -0{,}5806 \\ & & & & & & 7{,}9869 & -2{,}0522 \\ & & & & & & & 7{,}9869 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- Poređenjem odgovarajućih vrednosti elemenata u matricama krutosti $\mathbf{k}_N$ i $\mathbf{k}_A$ zaključuje se da su rešenja određena numeričkom i analitičkom integracijom međusobno bliska
- Svojstvene vrednosti matrice krutosti $\mathbf{k}_A$ su

$$\left\{1{,}627\cdot 10^6 \quad 981034 \quad 950722 \quad 515783 \quad 481635 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right\}$$

- Svojstvene vrednosti matrice krutosti $\mathbf{k}_N$ iznose

$$\left\{1{,}617\cdot 10^6 \quad 967659 \quad 939882 \quad 503263 \quad 467265 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right\}$$

Komentari:

- Odgovarajuće svojstvene vrednosti matrice krutosti $\mathbf{k}_A$ *malo* su veće od svojstvenih vrednosti matrice krutosti $\mathbf{k}_N$, tj. element čija je matrica krutosti $\mathbf{k}_A$ malo je krući.
- U oba slučaja broj nultih svojstvenih vrednosti odgovara broju stepeni slobode elementa kao krutog tela (dve translacije i jedna rotacija).
- Obe matrice su pozitivno semidefinitne.
- Krutost konačnog elementa može da se proceni pomoću traga matrice krutosti. Trag matrice krutosti $\mathbf{k}_A$ ima malo veću vrednost, za približno 1,3%, od vrednosti traga matrice krutosti $\mathbf{k}_N$. Ako bi se krutost konačnog elementa procenjivala preko srednje kvadratne vrednosti određene na osnovu koeficijenata matrice krutosti tada element čija je matrica krutosti $\mathbf{k}_A$ ima malo veću krutost s obzirom na to da je srednja kvadratna vrednost matrice krutosti $\mathbf{k}_A$ veća, za približno 1,1%, od srednje kvadratne vrednosti određene na osnovu koeficijenata matrice krutosti $\mathbf{k}_N$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
- S obzirom na to da opterećena ivica 2-3 ima konstantnu lokalnu prirodnu koordinatu $\xi = 1$ interpolacione funkcije glase

$$N_1 = 0 \qquad N_2 = \frac{1}{2}(1-\eta) \qquad N_3 = \frac{1}{2}(1+\eta) \qquad N_4 = 0$$

$$\mathbf{N}_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2}(1+\eta) \end{bmatrix}$$

- Vektor spoljašnjeg opterećenja glasi

$$\mathbf{q}_b(x,y) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{bx}(x,y) \\ \mathbf{q}_{by}(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10\cos(45°) \\ 10\sin(45°) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_b = \begin{Bmatrix} q_{bx}(\eta) \\ q_{by}(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{s,2}q_{bx,2} + N_{s,3}q_{bx,3} \\ N_{s,2}q_{by,2} + N_{s,3}q_{by,3} \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} q_{bx}(\eta) = 5\sqrt{2} \\ q_{by}(\eta) = 5\sqrt{2} \end{matrix} \qquad \mathbf{q}_b(\eta) = \begin{Bmatrix} q_{bx}(\eta) \\ q_{by}(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
- Geometrija opterećene ivice može da se opiše na sledeći način

$$x = N_{s,2}x_2 + N_{s,3}x_3 \qquad y = N_{s,2}y_2 + N_{s,3}y_3$$

- Parcijalni izvodi Dekartovih koordinata x i y po lokalnoj prirodnoj koordinati η

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{x_3 - x_2}{2} \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{y_3 - y_2}{2}$$

- Determinanta Jakobijeve matrice

$$\det \mathbf{J}_s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} = \frac{L_{2-3}}{2} \qquad L_{2-3} = \sqrt{\left(x_2 - x_3\right)^2 + \left(y_2 - y_3\right)^2} = 0{,}04123106$$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**

$$\mathbf{Q} = \int_{-1}^{1} \mathbf{N}_S^T(\eta)\mathbf{q}_b(\eta) h \det \mathbf{J}_S d\eta$$

- Ako se usvoji jedna tačka integracije sledi

$$\eta_1 = 0 \qquad w_1 = 2{,}0$$

- Matrica interpolacionih funkcija za tačku integracije ima oblik

$$\mathbf{N}_S(\eta_1 = 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Vektor opterećenja za tačku integracije glasi $\mathbf{q}_b(\eta_1 = 0) = \begin{Bmatrix} 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{Bmatrix}$

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
- Determinanta Jakobijeve matrice za tačku integracije ima vrednost

$$\det \mathbf{J}_S(\eta_1 = 0) = 0{,}0206155$$

- Koristeći prethodne izraze sledi

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{2x} \\ Q_{2y} \\ Q_{3x} \\ Q_{3y} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_S^T(\eta_1 = 0)\,\mathbf{q}_b(\eta_1 = 0)\,h \det \mathbf{J}_S(\eta_1 = 0)\,w_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}000728869 \\ 0{,}000728869 \\ 0{,}000728869 \\ 0{,}000728869 \end{Bmatrix} \text{kN}$$

Komentar:
Analitičko rešenje za vektor ekvivalentnog opterećenja jednako je rešenju određenom numeričkom integracijom. Ovo je posledica činjenice da su elementi vektora **Q** u podintegralnom izrazu polinomi prvog stepena, a Gausovim postupkom numeričke integracije može da se odredi tačno rešenje za polinom do $2n - 1$ stepena, tj. sa jednom tačkom integracije dobija se tačno rešenje za polinom prvog stepena

Izoparametarski KE. Primer 1. Četvorougaoni izoparametarski KE

- **Komponente deformacije**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bd} \qquad \mathbf{d}^T = \{0{,}00001 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}\ \text{m}$$

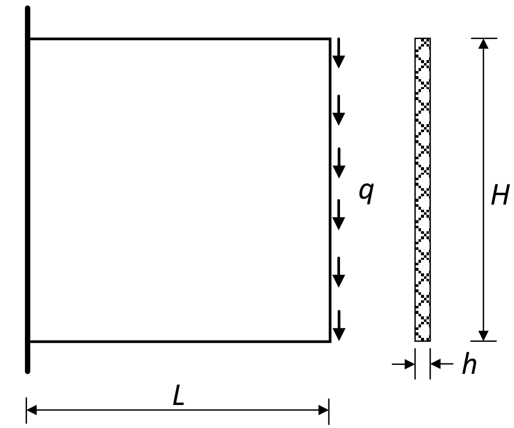
$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \mathbf{B}_a\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} -262{,}891712 \\ 0{,}0 \\ -262{,}891712 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} -236{,}148241 \\ 0{,}0 \\ -97{,}185092 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathbf{B}_c\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} -70{,}441622 \\ 0{,}0 \\ -70{,}441622 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_d = \mathbf{B}_d\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} -10{,}228571 \\ 0{,}0 \\ -323{,}104763 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

- **Komponente napona**

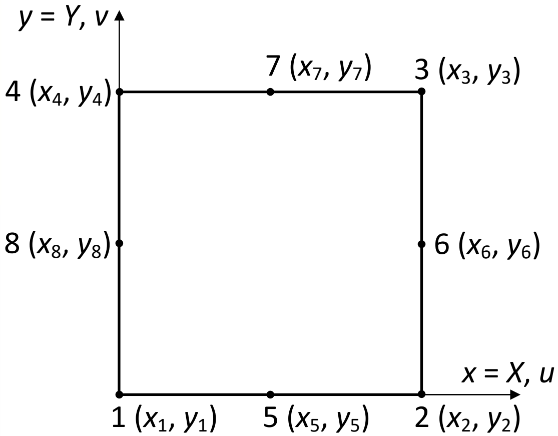
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBd} \qquad \mathbf{d}^T = \{0{,}00001 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}\ \text{m}$$

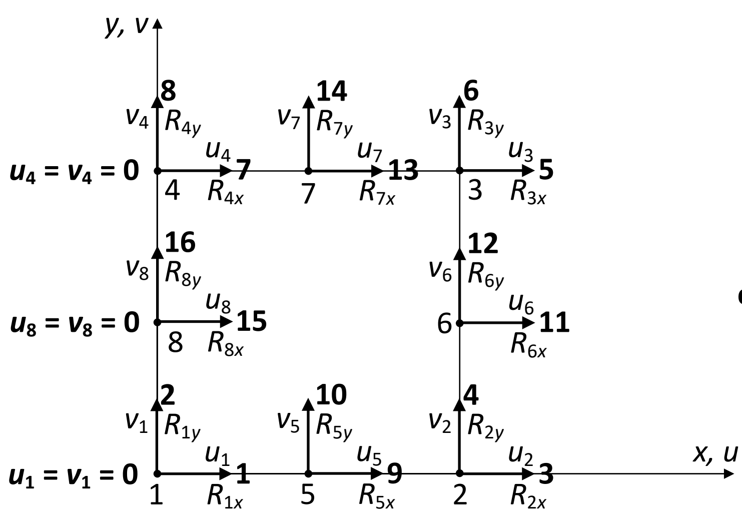
$$\boldsymbol{\sigma}_a = \mathbf{DB}_a\mathbf{d} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_a = \begin{Bmatrix} -60{,}667 \\ -18{,}200 \\ -21{,}234 \end{Bmatrix} \text{MPa} \quad \boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{DB}_b\mathbf{d} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{Bmatrix} -54{,}496 \\ -16{,}349 \\ -7{,}850 \end{Bmatrix} \text{MPa} \quad \boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{DB}_c\mathbf{d} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_c = \begin{Bmatrix} -16{,}256 \\ -4{,}877 \\ -5{,}690 \end{Bmatrix} \text{MPa} \quad \boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{DB}_d\mathbf{d} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_d = \begin{Bmatrix} -2{,}360 \\ -0{,}708 \\ -26{,}097 \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

Izoparametarski KE
Primer 2
Serendipiti KE sa 8 čvorova



- Podaci su: $q = 10^4$ kPa, modul elastičnosti $E = 31$ GPa, Poasonov koeficijent $\nu = 0{,}2$, debljina $h = 0{,}2$ m, visina $H = 1{,}0$ m i raspon $L = 1$ m





Vektor pomeranja

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_{13} \\ d_{14} \\ d_{15} \\ d_{16} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 & 1 \\ v_1 & 2 \\ u_2 & 3 \\ v_2 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ u_7 & 13 \\ v_7 & 14 \\ u_8 & 15 \\ v_8 & 16 \end{Bmatrix}$$

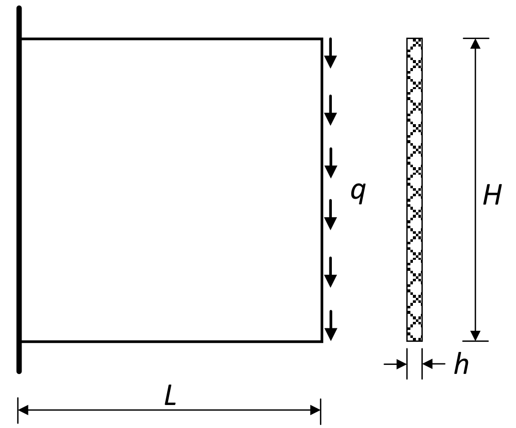
Vektor nepoznatih pomeranja

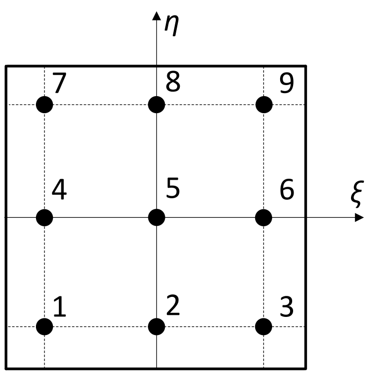
$$\mathbf{d}_a = \begin{Bmatrix} u_2 & 3 \\ v_2 & 4 \\ u_3 & 5 \\ v_3 & 6 \\ u_5 & 9 \\ v_5 & 10 \\ u_6 & 11 \\ v_6 & 12 \\ u_7 & 13 \\ v_7 & 14 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{K}_{aa}^{-1}\mathbf{S}_a$$

Izoparametarski KE
Primer 2
Serendipiti KE sa 8 čvorova

- **Matrica krutosti (red integracije 3x3)**





$$\xi_1 = -\sqrt{0,6},\quad \eta_1 = -\sqrt{0,6},\quad w_1 = \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_2 = 0,\quad \eta_2 = -\sqrt{0,6},\quad w_2 = \frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_3 = \sqrt{0,6},\quad \eta_3 = -\sqrt{0,6},\quad w_3 = \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_4 = -\sqrt{0,6},\quad \eta_4 = 0,\quad w_4 = \frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}$$

$$\xi_5 = 0,\quad \eta_5 = 0,\quad w_5 = \frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}$$

$$\xi_6 = \sqrt{0,6},\quad \eta_6 = 0,\quad w_6 = \frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}$$

$$\xi_7 = -\sqrt{0,6},\quad \eta_7 = \sqrt{0,6},\quad w_7 = \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

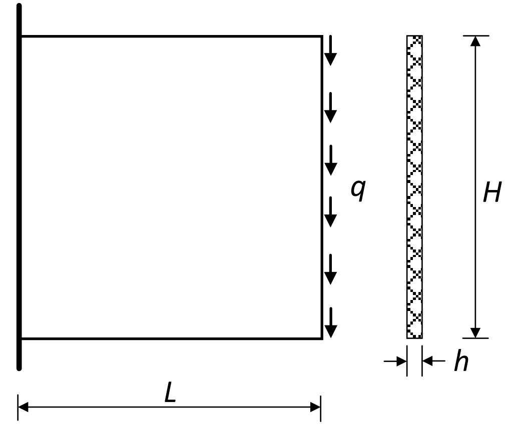
$$\xi_8 = 0,\quad \eta_8 = \sqrt{0,6},\quad w_8 = \frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\xi_9 = \sqrt{0,6},\quad \eta_9 = \sqrt{0,6},\quad w_9 = \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 32,2917 & 6,4583 & 0 \\ 6,4583 & 32,2917 & 0 \\ 0 & 0 & 12,9167 \end{bmatrix}\cdot 10^6$$

Izoparametarski KE
Primer 2
Serendipiti KE sa 8 čvorova



- **Matrica krutosti (red integracije 3x3)**
  - <u>Tačka integracije 1</u>

$$J_{11,1}(\xi_1,\eta_1)=0{,}5$$
$$J_{12,1}(\xi_1,\eta_1)=0$$
$$J_{21,1}(\xi_1,\eta_1)=0$$
$$J_{22,1}(\xi_1,\eta_1)=0{,}5$$

$$\det \mathbf{J}_1(\xi_1,\eta_1)=0{,}25 \qquad \mathbf{J}_1^{-1}(\xi_1,\eta_1)=\begin{bmatrix}2{,}0 & 0\\ 0 & 2{,}0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix}-2{,}0619 & 0 & -0{,}687298 & \cdots & -0{,}4 & 0\\ 0 & -2{,}0619 & 0 & \cdots & 0 & 2{,}74919\\ -2{,}0619 & -2{,}0619 & -0{,}0872983 & \cdots & 2{,}74919 & -0{,}4\end{bmatrix}_{3x16}$$

$$\mathbf{k}_1=\mathbf{B}_1^T\mathbf{D}\mathbf{B}_1 h \det \mathbf{J}_1 w_1$$

$$\mathbf{k}_1=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & 2 & \cdots & 15 & 16\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc|c}2{,}96604 & 1{,}27116 & \cdots & -0{,}71892 & -0{,}40056 & 1\\ & 2{,}96604 & \cdots & -1{,}04772 & -2{,}6604 & 2\\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ & \text{sim.} & & 1{,}58629 & -0{,}3288 & 15\\ & & & & 3{,}79829 & 16\end{array}\right]_{16x16}\end{array}\cdot 10^6$$

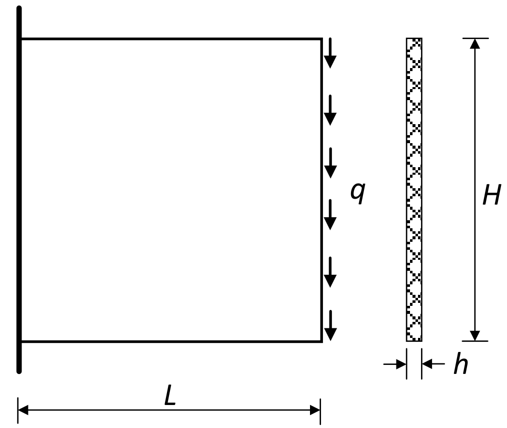
<u>itd. za ostale tačke interacije</u>

- Numeričko rešenje za matricu krutosti

$$\mathbf{k}_N=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1 & 2 & \cdots & 15 & 16\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc|c}5{,}22407 & 1{,}82986 & \cdots & -1{,}86574 & -0{,}43056 & 1\\ & 5{,}22407 & \cdots & -1{,}29167 & -5{,}56852 & 2\\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ & \text{sim.} & & 8{,}03704 & 0 & 15\\ & & & & 12{,}8593 & 16\end{array}\right]_{16x16}\end{array}\cdot 10^6$$

Komentar:
Analitičko rešenje za matricu krutosti jednako je numeričkom rešenju. Matrica krutosti je pozitivno semidefinitna i ima 3 svojstvene vrednosti jednake nuli, odnosno broj svojstvenih vrednosti jednakih nuli jednak je broju stepeni slobode konačnog elementa kao krutog tela (dve translacije i jedna rotacija)

Izoparametarski KE
Primer 2
Serendipiti KE sa 8 čvorova



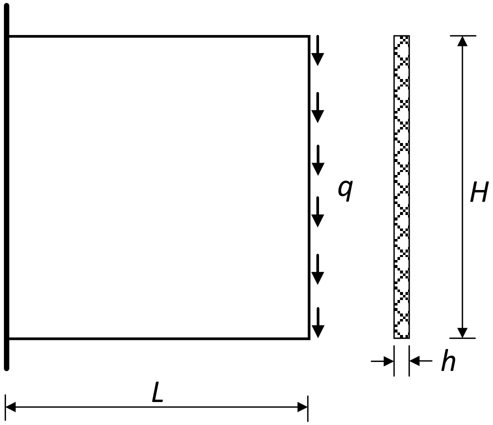
- **Vektor ekvivalentnog opterećenja** (analogni postupak kao i u prethodnom zadatku)
  - Opterećena ivica 2-3 ima konstantnu lokalnu prirodnu koordinatu ξ = 1
  - Matrica IF za opterećenu ivicu glasi

$$\mathbf{N}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+\eta)\eta & 0 & \frac{1}{2}\eta(1+\eta) & 0 & 1-\eta^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(-1+\eta)\eta & 0 & \frac{1}{2}\eta(1+\eta) & 0 & 1-\eta^2 \end{bmatrix}$$

  - Vektor spoljašnjeg opterećenja

$$\mathbf{q}_b(x,y) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{bx}(x,y) \\ \mathbf{q}_{by}(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ -10000,0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q}_b(\eta) = \begin{Bmatrix} q_{bx}(\eta) \\ q_{by}(\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0 \\ -10000,0 \end{Bmatrix}$$

Izoparametarski KE
Primer 2
Serendipiti KE sa 8 čvorova

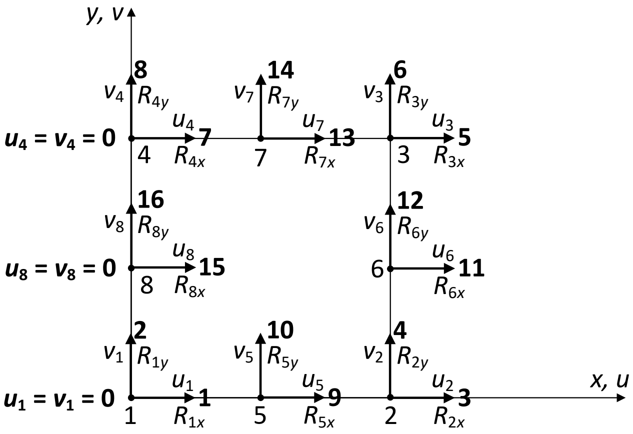


- **Vektor ekvivalentnog opterećenja**
  - Determinanta Jakobijeve matrice za opterećenu ivicu (ξ = 1, i = 2, 3 i 6) glasi

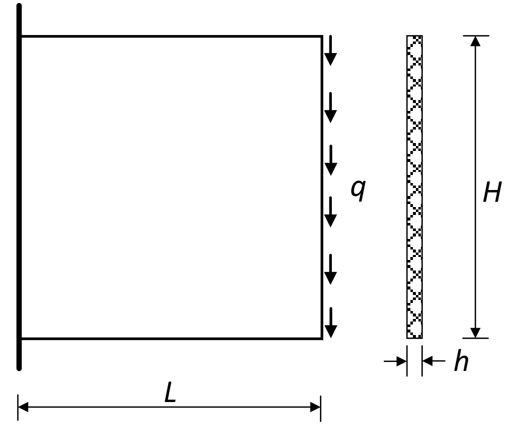
$$\det \mathbf{J}_S = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i = \frac{1}{2}$$

  - Koristeći prethodne izraze sledi

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{Bmatrix} Q_{2x} \\ Q_{2y} \\ Q_{3x} \\ Q_{3y} \\ Q_{6x} \\ Q_{6y} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{1} \mathbf{N}_S^T \mathbf{q}_b h \det \mathbf{J}_S d\eta = \begin{Bmatrix} 0 \\ -333,\dot{3} \\ 0 \\ -333,\dot{3} \\ 0 \\ -1333,\dot{3} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

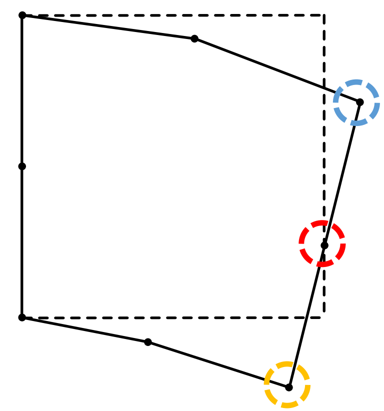


Izoparametarski KE
Primer 2
Serendipiti KE sa 8 čvorova



- **Rešenje za pomeranja**

$$
\mathbf{K}_{aa}=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 3 & 4 & \cdots & 13 & 14 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
5{,}22407 & -1{,}82986 & \cdots & -3{,}04259 & 0{,}43056 \\
 & 5{,}22407 & \cdots & 0{,}43056 & -1{,}5787 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & \text{sim.} & & 12{,}8593 & 0 \\
 & & & & 8{,}03704
\end{array}\right]_{10\times 10}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 13 \\ 14 \end{array}
\cdot 10^{6}
\qquad
\mathbf{Q}_a=\mathbf{S}_a=\left\{\begin{array}{c}
0 \\ -333{,}\dot{3} \\ 0 \\ -333{,}\dot{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1333{,}\dot{3} \\ 0 \\ 0
\end{array}\right\}
\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}
$$

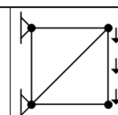
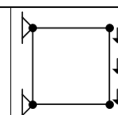
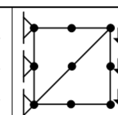
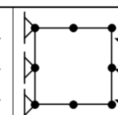
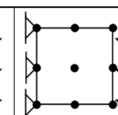


$$
\mathbf{d}_a=\left\{\begin{array}{c}
-9{,}4868 \\ -20{,}3629 \\ 9{,}4868 \\ -20{,}3629 \\ -6{,}8485 \\ -7{,}8098 \\ 0 \\ -19{,}8717 \\ 6{,}8485 \\ -7{,}8098
\end{array}\right\}
\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}
\cdot 10^{-4}\ \text{m}
$$

***Tačno* rešenje za ugib kraja konzole glasi**

$$
v_{\text{tačno}}=-\frac{|q_z|hHL^3}{2Eh\left(\dfrac{H}{2}\right)^3}-(4+5\nu)\frac{|q_z|hHL}{4Eh\left(\dfrac{H}{2}\right)}=-20{,}9677\cdot 10^{-4}\ \text{m}
$$

Komentar:

						Tačno rešenje
Ugib $v_6\cdot 10^{-4}$[m]	− 10,2244	− 14,3779	− 19,1515	− 19,8717	− 20,2493	− 20,9677
Greška u odnosu na tačno rešenje [%]	51,2	31,4	8,7	5,2	3,4	/